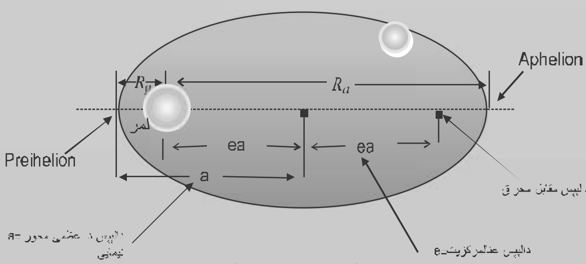
شیخ زاید پوهنتون، خوست

عمومي رياضيات



$$R_a = a(1+e) \text{ ، } R_p = a(1-e)$$

پوهاند گل محمد جنت زی

۱۳۹۲

عمومي رياضيات

General Mathematics

پوهاند گل محمد جنت زی

Shaikh Zayed University, Khost

AFGHANIC

Prof. Gul M. Jannat Zai

General Mathematics

Funded by
German-Afghan University Society (DAUG)

ISBN 978-9936-200-15-9

9 789936 200159 >

2013

بسم الله الرحمن الرحيم

شیخ زاید پوهنتون، خوست

عمومـــــــي رياضـــــــيات

پوهاند ګل محمد جنت زی

۱۳۹۲

د کتاب نوم	عمومي رياضيات
ليکوال	پوهاند گل محمد جنت زی
خپرندوی	شيخ زايد پوهنتون
ويب پاڼه	www.szu.edu.af
چاپ ځای	سهرمطبعه، کابل، افغانستان
چاپ شمېر	۱۰۰۰
د چاپ کال	۱۳۹۲
دکتاب ډاونلوډ	www.ecampus-afghanistan.org

دا کتاب د آلمان - افغان پوهنتونونو ټولنې **(DAUG)** لخوا تمويل شوی دی.
اداري او تخنيکي چارې يې په آلمان کې د افغانيک موسسې لخوا ترسره شوې دي.
د کتاب د محتوا او ليکنې مسؤليت د کتاب په ليکوال او اړوندې پوهنځي پورې اړه لري. مرسته کوونکې او تطبيق کوونکي ټولنې په دې اړه مسؤليت نه لري.

د تدريسي کتابونو د چاپولو لپاره له موږ سره اړيکه ونيسئ:
ډاکتر يـــحـــيی وردک، د لوړو زدکړو وزارت، کابل
دفتر: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
ايميل: textbooks@afghanic.org

ای اس بي ان: ISBN: 978 993 6200 159

د لوړو زده کړو وزارت پيغام

د بشر د تاريخ په مختلفو دورو کې کتاب د علم او پوهې په لاسته راوړلو کې ډیر مهم رول لوبولی دی او د درسي نصاب اساسي برخه جوړوي چې د زده کړې د کیفیت په لوړولو کې مهم ارزښت لري. له همدې امله د نړیوالو پیژندل شویو ستندردونو، معیارونو او د ټولنې د اړتیاوو په نظر کې نیولو سره باید نوي درسي مواد او کتابونه د محصلینو لپاره برابر او چاپ شي.

د لوړو زده کړو د مؤسسو د ښاغلو استادانو څخه د زړه له کومي مننه کوم چې ډېر زیار یې ایستلی او د کلونو په اوږدو کې یې په خپلو اړوندو څانګو کې درسی کتابونه تألیف او ژباړلي دي. له نورو ښاغلو استادانو او پوهانو څخه هم په درنښت غوښتنه کوم تر څو په خپلو اړوندو برخو کې نوي درسي کتابونه او نور درسي مواد برابر کړي څو تر چاپ وروسته د ګرانو محصلینو په واک کې ورکړل شي.

د لوړو زده کړو وزارت دا خپله دنده بولي چې د ګرانو محصلینو د علمي سطحې د لوړولو لپاره معیاري او نوي درسی مواد برابر کړي.

په پای کی د جرمن افغان پوهنتونونو د ټولنی (DAUG) او ټولو هغو اړوندو ادارو او کسانو څخه مننه کوم چې د طبي کتابونو د چاپ په برخه کې یی هر اړخیزه همکاري کړې ده.

هیله مند یم چی نوموړې پروسه دوام وکړي او د نورو برخو اړوند کتابونه هم چاپ شي.

په درنښت
پوهاند ډاکتر عبیدالله عبید
د لوړو زده کړو وزیر
کابل، ۱۳۹۲

د درسي کتابونو د چاپ پروسه

قدرمنو استادانو او ګرانو محصلینو !

د افغانستان په پوهنتونونو کې د درسي کتابونو کموالی او نشتوالی له لویو ستونزو څخه ګڼل کېږي. یو زیات شمیر استادان او محصلین نوي معلوماتو ته لاس رسی نه لري ، په زاړه میتود تدریس کوي او له هغو کتابونو او چپترونو څخه ګټه اخلي چې زاړه دي او په بازار کې په ټیټ کیفیت فوتوکاپي کېږي.

د دې ستونزو د هوارولو لپاره په تېرو دوو کلونو کې مونږ د طب پوهنځیو د درسي کتابونو د چاپ لړۍ پیل او تر اوسه مو ۱۱۲ عنوانه طبي درسي کتابونه چاپ او د افغانستان ټولو طب پوهنځیو ته استولي دي.

دا کړنې په داسې حال کې تر سره کېږي چې د افغانستان د لوړو زده کړو وزارت د (۲۰۱۰-۲۰۱۴) کلونو په ملي ستراتیژیک پلان کې راغلي دي چې:

«د لوړو زده کړو او د ښوونې د ښه کیفیت او زده کوونکو ته د نویو ، کره او علمي معلوماتو د برابرولو لپاره اړینه ده چې په دري او پښتو ژبو د درسي کتابونو د لیکلو فرصت برابر شي د تعلیمي نصاب د ریفورم لپاره له انګریزي ژبې څخه دري او پښتو ژبو ته د کتابونو او درسي موادو ژباړل اړین دي، له دې امکاناتو څخه پرته د پوهنتونونو محصلین او استادان نشي کولای عصري، نویو ، تازه او کره معلوماتو ته لاس رسی پیدا کړي».

د افغانستان د طب پوهنځیو محصلین او استادان له ډېرو ستونزو سره مخامخ دي. نویو درسي موادو او معلوماتو ته نه لاس رسی، او له هغو کتابونو او چپترونو څخه کار اخیستل چې په بازار کې په ډېر ټیټ کیفیت پیداکېږي د دې برخې له ځانګړو ستونزو څخه ګڼل کېږي. له همدې کبله هغه کتابونه چې د استادانو له خوا لیکل شوي دي باید راټول او چاپ کړل شي. د هیواد د اوسنی حالت په نظر کې نیولو سره مونږ لایقو ډاکترانو ته اړتیا لرو ترڅو وکولای شي په هیواد کې د طبي زده کړو په ښه والي او پرمختګ کې فعاله ونډه واخلي. له همدې کبله باید د طب پوهنځیو ته زیاته پاملرنه وشي.

تراوسه پوري مونږ د ننګرهار، خوست، کندهار، هرات، بلخ او کاپیسا د طب پوهنځیو او کابل طبي پوهنتون لپاره ۱۱۲عنوانه مختلف طبي تدریسي کتابونه چاپ کړي دي. د ننګرهار طب پوهنځی لپاره د۲۰ نورو طبي کتابونو د چاپ چارې روانې دي. د یادونې وړ ده چې نوموړي چاپ شوي کتابونه د هیواد ټولو طب پوهنځیو ته په وړیا توګه ویشل شوي دي.

ټول چاپ شوي طبي کتابونه کولای شی د www.ecampus-afghanistan.org ویب پاڼې څخه ډاونلوډ کړی.

کوم کتاب چې ستاسې په لاس کې دی زمونږ د فعالیتونویوه بېلګه ده. مونږ غواړو چې دې پروسې ته دوام ورکړو تر څو وکولای شو د درسي کتابونو په برابرولو سره د هیواد له پوهنتونونو سره مرسته وکړو او د چپټر او لکچر نوټ دوران ته د پای ټکی کېږدو. د دې لپاره دا اړینه ده چې د لوړو زده کړو د مؤسساتو لپاره هر کال څه نا څه ۱۰۰ عنوانه درسی کتابونه چاپ کړل شي.

د لوړو زده کړو د وزارت، پوهنتونونو، استادانو او محصلینو د غوښتنې په اساس په راتلونکی کی غواړو چې دا پروګرام غیر طبي برخو ته لکه ساینس، انجنیري، کرهنې، اجتماعی علومو او نورو پوهنځیو ته هم پراخ کړو او د مختلفو پوهنتونونو او پوهنځیو د اړتیا وړ کتابونه چاپ کړو.

له ټولو محترمو استادانو څخه هیله کوو، چې په خپلو مسلکي برخو کې نوي کتابونه ولیکي، وژباړي او یا هم خپل پخواني لیکل شوي کتابونه، لکچر نوټونه او چپټرونه ایډیټ او د چاپ لپاره تیار کړي. زمونږ په واک کې یې راکړي، چې په ښه کیفیت چاپ او وروسته یې د اړوندې پوهنځی، استادانو او محصلینو په واک کې ورکړو. همدارنګه د یادو شویو ټکو په اړوند خپل وړاندیزونه او نظریات زمونږ په پته له مونږ سره شریک کړي، تر څو په ګډه پدې برخه کې اغیزمن ګامونه پورته کړو.

له ګرانو محصلینو څخه هم هیله کوو چې په یادو چارو کې له مونږ او ښاغلو استادانو سره مرسته وکړي.

د یادونې وړ ده چې د مولفینو او خپروونکو له خوا پوره زیار ایستل شوی دی، ترڅو د کتابونو محتویات د نویو نړیوالو علمي معیارونو په اساس برابر شي خو بیا هم کیدای شی د کتاب په محتوی کی ځینی تیروتنی او ستونزې وجود ولری، نو له دی امله له درنو لوستونکو څخه هیله مند یو تر څو خپل نظریات او نیوکی د مؤلف او یا زمونږ په پته په لیکلی بڼه را ولیږی، تر څو په راتلونکی چاپ کی اصلاح شي.

د جرمن افغان پوهنتونونو د ټولنې (German-Afghan University Society (DAUG څخه ډېره مننه کوو چې د دی کتاب د چاپ لګښت یې پر غاړه اخیستی دی.

په ځانګړي توګه د جی آی زیت (GIZ) له دفتر او CIM (Center for International Migration and Development) یا د نړیوالی پناه غوښتنی او پرمختیا مرکز چې زما لپاره یې په تېرو درېو کلونو کې په افغانستان کې د کار امکانات برابر کړی دي هم مننه کوم.

د لوړو زده کړوله محترم وزیرښاغلي پوهاند ډاکترعبیدالله عبید، علمی معین ښاغلي پوهنوال محمد عثمان بابری، مالي او اداري معین ښاغلی پوهنوال ډاکتر گل حسن ولیزي، د پوهنتونونو او پوهنځیو له ښاغلو رییسانو او استادانو څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ لړۍ یې هڅولې او مرسته یې ورسره کړې ده.

همدارنګه د دفتر له ښاغلو همکارانو څخه هم مننه کوم چې د کتابونو د چاپ په برخه کې یې نه ستړې کیدونکې هلې ځلې کړې دي.

ډاکتر یحیی وردګ، د لوړو زده کړو وزارت
کابل، مارچ ۲۰۱۳
د دفتر ټیلیفون: ۰۷۵۶۰۱۴۶۴۰
ایمیل: textbooks@afghanic.org
wardak@afghanic.org

تقریظ

په طبیعیت کې قوانین شته دي چې د طبیعي علومو په وسیله کشف او بیا د ریاضي علوم په مرسته فورمول بندي کیږي ، طبیعي علوم د ریاضیاتو پرته پر مخ نشي بېول کیدلی .

د انجنیري،زراعت ،فارمسي،زمین شناسي،کمپیوټرساینس او اقتصاد تجربې او مهارتونه د ریاضیاتو څخه پرته تکمیل کیدلی نشي ، نو ځکه ریاضیات په دې ټولو څانګو کې او پر هغې برسېره په اجتماعي علومو او ژورنالېزم کې هم تدریس او په کار وړل کیږي .

د انجنیري پر مخ تګ او په هغې کې د مهارتونو لاس ته راوړنه د ریاضي پرته نا ممکنه ده نو ځکه د ریاضي زده کړه په انجینري پوهنځی کې یو حتمي مضمون دی .

د عمومي ریاضي په نامه مضمون ، کوم چې د انجینري پزهنځیو په لومړیو کالونو کې تدریس کیږي له یوې خوا د مخکینیو نیمګړتیاوو پوره کول اود بلې خوا د وړپسې مضامینو لپاره الات او اسباب جوړوي .

په انجنیري پوهنځیو کې عمومي ریاضي په زیاته پیمانه کلکولس او تحلیلي هندسه وي چې د تحصیلي پلانونو یوه حتمي برخه ده . په دې هکله په خارجي ژبو کې کتابونه په نا کافي اندازه پیدا کیږي . خو داسې کتابونه چې له یوې خوا د اړونده پوهنځیو د درسي مفرداتو سره برابر او له بلې خوا په ملي ژبو وي یا نشته او یا هم که پیدا شي نو د ېر پخوا به لیکل شوي او نا تکمیل به وي .همدا دلیل وو چې پوهنوال ګل محمد جنت زي ته دنده ورکړل شوي ده تر څو د شېخ زاید (خوست) پوهنتون د انجینري پوهنځی د دوو لومړي سمسترونو له پاره د عمومي ریاضي تر عنوان لاندې درسي کتاب ولیکي . چې له یوې خوا درسي نیمګړتیاوې پوره کړي او له بلې خوا لیکونکی هغه پوهاندي علمي رتبې ته د اصلي اثر په توګه وکاروي .

ددې سره سره چې په دې هکله تصویب شوي مفردات موجود دي ، خو زما د مشورې سره سم نه یوازې هغه مفردات په نظر کې نیول شوي دي بلکه د کابل انجینري پوهنځی نوي درسي کتابونه هم په نظر کې نیول شوي او د هغې څخه په کافي اندازه استفاده شوي ده .

دا کتاب په لسو فصلونو کې لیکل شوی دی په لومړي فصل کې یې د اساساتو تر عنوان لاندې د سټونو او د هغوی د عملیو په هکله ضروري اړونده موضوعات، په دویم فصل کې یې په مستوي کې د تحلیلي هندسې په هکله، په دریم فصل کې یې تابع، په څلورم فصل کې یې په تابع ګانو کې لیمېټ او مشتق ، په پنځم فصل کې د مشتق کارونه او تطبیقات، په شپږم فصل کې پارامتریکې معادلې او قطبي مختصات ، په اووم فصل کې انتیګرالونه ، په اتم فصل کې د انتیګرالونو کارونه، په نهم

فصل کې د درې بعده فضا ځنې مفاهیم او وکتورونه او په لسم فصل کې د مستوي او منحنې معادلې تر عنوانونو لاندې موضوع ګانې لیکل شوي دي .

نوموړي په هره برخه کې د لازمو مفاهیمو معرفي او کافي تفصیلات په نظر کې نیولي او هم یې په کافي اندازه مثالونه ورکړي دي . بر سېره پر دې یې په انجیري کې د هغوی تطبیق ښېرلی او هم یې د محصلانو له پاره لازمې دندې په نظر کې نیولي دي .

دا کتاب روان او په ساده ژبه لیکل شوی دی چې نه یوازې د خوست د انجینري پوهنځی له پاره درسي ښه کتاب کیدلی شي بلکه په ولایاتو کې د نورو پوهنځیو له پاره هم ښه درسي کتاب او په عمومي توګه ښه درسي ممد دی .

زه ددې کتاب لیکنه ستایم او اړونده مقاماتو ته یې د چاپ سپارښت کوم او لیکونکي ته په دې لاره کې لانورې بریالیتوب غواړم . په درښښت

پوهاند دکتور سید قیوم شاه باور

د کابل پوهنتون د ریاضیاتو استاد

تقریظ

کتاب ریاضیات عمومي تالیف پوهنوال گل محمد جنت زی، مباحث سیستم اعداد حقیقي، سیستم های مختصات قایم و قطبي ، توابع ، لیمت ، مشتق، انتیگرال، اساسات وکتورها ، توابع وکتوري ، منحني های فضائی و تطبیقات آنها را در بر میگیرد.

این کتاب مطابق مفردات درسي صنوف اول پوهنځی های ئی انجینري نوشته شده که دران موضوعات لازمه با رعایت تسلسل طور مفصل تحلیل و ارایه گردیده است . همه مطالب موازي با مثال های متنوع تطبیقی و طرح تمرین های مکمل هر بحث ، همراهي شده اند .

تعاریف ،قضایا ، مفاهیم و فورمول هاتوام با مودل سازی مسایل تطبیقی و تحلیل آنها توضیح گردیده و با معیار های ادبي به رشته تحریر درآمده و با سلیقه خوبې مرتب شده اند .اشکال و جداول منظم ، مباحث کتاب را تکمیل میکند .

مولف دراین کار زحمات زیادی را متقبل شده و هدف را کاملاً برآورده ساخته است . این کتاب برای تدریس مضمون ریاضی صنوف اول پوهنځی های انجینري مفید و لازمی بوده و برای سایر رشته های علوم طبیعی ممد درسی خوبی میباشد ، لهذا آن را بحیث کتاب درسی قابل نشر دانسته ، چاپ آن را سپارش مینمایم ، برعلاوه این اثر جهت ترفیع به رتبه علمي پوهاند کاملاً کافی است . موفقیت های بیشتر استاد را از خداوند متعال میخواهم .

پوهنوال دکتور محمد انور غوری

تقريظ

د پوهنوال گل محمد جنتي زي د عمومي رياضياتود کتاب تاليف چې په لسو فصلونو کې ليکل شوی ، په لومړي فصل کې يې د اساساتو تر عنوان لاندې ستونه او په هغوی پورې اړوند موضوعات ،په دوهم فصل کې په مستوي کې د تحليلي هندسې په هکله ،په دريم فصل کې تابع ، په څلورم فصل کې په تابع گانو کې ليمېټ او مشتق ، په پنځم فصل کې د مشتق کارونه او تطبيقات ،په شپږم فصل کې پارامتريکې معادلې او قطبي مختصات .په اووم فصل کې انتيگرالونه .په اتم فصل کې د انتيگرال کارونه ،په نهم قصل کې د د درې بعدي فضا ځينې مفهومونه او په لسم فصل کې د مستوي او منحني تر عنوان لاند موضوعات راغلي دي

د دې کتاب په هره برخه کې د لازمو مفهومونو معرفي او کافي تفصيلات په نظر کې نيول شوي اوهم يې په کافي اندازه مثالونه ورکړيدي او هم يې په انجينري کې د هغوی تطبيق څېړلی او د محصلانو له پاره لازمې دندې په نظر کې نيولي دي .

دا کتاب چې په روانه او ساده ژبه ليکل شوی دی نه يوازې د خوست د انجنينري محصلانوله پاره درسي ښه کتاب کيدلی شي بلکه په ولاياتو کې د نورو پوهنځيو له پاره هم ښه درسي کتاب او په عمومي توگه ښه درسي ممد دی . نو له دې سببه زه د نوموړي دا کتاب او د هغې زحمتونه ستايم او د اړوند مقاماتو څخه يې د چاپ سپارښت کوم. همدارنگه د نوموړي له پاره دا کتاب د پوهنوالی علمي رتبې څخه د پوهاند علمي رتبې د ترفيع له پاره کاملا کافي بولم او ليکونکي ته په دې لاره کې لانور برياليتوب غواړم . په درښت

پوهاند عبدالحق ايمل

د کابل پوهنتون د ساينس پوهنځی

د رياضياتو استاد

مخکینۍ خبرې

د ریاضیاتو (هغه پوهې چې د عددونو او مقدارونو په باره کې بحث کوي او پر حساب، جبر او هندسې باندې مشتملې دي) تاریخ په ختیځ کې د میلاد څخه پخوا د 2000 کلونو په شاوخواکې پیل کیږي او د میلاد نه پخوا په څلورمه او پنځمه پېړۍ کې ئې په پخواني یونان کې د ظهور او تکامل پړاوونه وهلي او بشپړ شوي دي.

یونانیانو د ریاضیاتو، خصوصاً د هندسې په تاریخ کې، ډېرې زیاتې برياوې اوپایلې ترلاسه کړې دي چې دا یون تر نن ورځې پورې دوام لري او له ګټې څخه ئې سترګې نه شو پټولی . په اوولسمه پېړۍ کې د تحلیلي هندسې په منځ ته راتګ سره د ریاضیاتو په علم کې داسې یو بې ساري تحول او بدلون رامنځ ته شو چې د ریاضیاتو په برخه کې ئې، د کلاسیکو عقیدو د توضیح او د نویو پرمختګونو بنسټ کېښود. د وخت په تیرېدو سره د ریاضیاتو دغه چټک بدلون په زیاته اندازه منطق ته تمایل پیدا کړ چې منطق ته د دغه تمایل په نتیجه کې ریاضیات، د ورځنی ژوند د تطبیق ساحې عملي ډګر ته ور داخل شول او د عصري تکنالوژۍ سره ئې یوځای، څنګ پرڅنګ خپل ځان عیار کړی او د هغې اړتیاوې د ریاضیاتو له پاره په کامله توګه څرګندې دي.

همدارنګه د ریاضیاتود تدریس د ضرورت په بناپه ښوونځیو، پوهنځیو او په خاصه توګه د انجینري په پوهنځي کې د خپل مربوطه دیپارتمنت له خوا وظیفه راکړل شوه چې دغه علمي کار ترسره کړم. ما هڅه کړېده چې د اړوند معتبروکتابونو څخه استفاده وکړم او د خپلو هغو یادښتونو سره ئې یوځای کړم چې د ډیرو کلونو د تدریس په جریان کې مې د مسلک د پوهانو د لارښونو او نظریو په لړ کې برابر کړي او تهیه کړيدي. هیله ده چې زما له دغه اثر څخه به ګران محصلین او نور محترم لوستونکي ګټه واخلي او د مسلک خاوندان به زما دغه نیمګاره مانۍ نوره هم اباده او سمسوره کړي.

په پای کې د ریاضیاتو د محترمو استادانو پوهاند عبدالحق ایمل ، پوهنوال ډاکترمحمد انور غوري او په خاصه توګه د محترم استاد پوهاند ډاکتر سیدقیوم شاه باورد هلو ځلواو لارښودنو څخه چې د کتاب د تألیف په مورد یې زماسره ترسره کړي دي زیاته مننه کوم .همدارنګه د پوهاند زلمی ذاهب او پوهنوال فیض محمد فیاض څخه هم مننه کوم چې زما سره ئې د دغه اثر په لیکنه کې په ترتیب سره د مأخذونو د منابعویه برابرولو او د اثر د لیکنې په وخت کې د ژبنیو اوصولو د مراعاتولو په برخه کې لازمې لار ښوونې کړي دي. دوی ټولو ته د لوی خدای له دربار څخــه د لازیاتو توفیقونو او بریاوو غوښتونکی یم.

ومن الله توفیق

پوهنوال ګل محمد جنت زی

****

بسم الله الرحمن الرحيم(ط)

د موضوع ګانو فهرست

څلورم فصل

پنځم فصل

شپږم فصل

سریزه

دا چې زموږ ګران هېواد افغانستان په دې وروستيو کلونو کې د تېرو جګړو له لاسه په علمي لحاظ په زياته اندازه تاواني شويدی، ټول علمي مرکزونه، په ملي او خارجي ژبو سمبال کتابخانې او علمي کادرونه يې د مسلک په مختلفو څانګو کې دلاسه ورکړيدي. نو په دې اساس هر افغان او د مسلک خاوند مجبور او مکلف دی چې د خپل مسلک او رشتې مطابق د هېواد په بيا روغونه کې فعاله ونډه واخلي. بنا پردې د ډېرو کلونو را په دې خوا مې د خپل مسلک سره اړيکې شلولي وې ،ولې د پنځو کالونو را په دې خوا د خپل مسلک مطابق د خوست د شيخ زايد په پوهنتون کې د رياضياتود استاد په صفت د انجنيري، ښوونې روزنې او کمپيوټرسيانس په پوهنځيو کې دنده تر سره کوم ، په داسې حال کې چې له يوې خوا د علمي کادرونو څخه د فاصلې د لرې والي او نا مساعدو شرايطو په نسبت بې برخې پاته يم او د بلې خوا داسې کتابتون چې د رشتې مطابق په خارجي يا ملي ژبو سمبال او تحقيقي رسالو لرونکي وي هم نشته .چې په دې لاره کې را سره مرسته وکړي. سره له دغو مشکلاتو مې هم د پوهنوالی علمي رتبې څخه د پوهاندی علمي رتبې ته د انجنيري پوهنځی د محصلانو له پاره د رياضياتو د يوه درسي کتاب دتاليف دنده په پښتو ژبه پرغاړه واخيسته. ځکه چې د شيخ زايد په پوهنتون کې د نورو پوهنتونونوپه نسبت په ملي ژبو د درسي کتابونو تاليف ته ډېر زيات ضرورت موجود دی.

رياضيات د انجينري په پوهنځی کې د درسي پروګرام مطابق د پنځوسمسترونو له پاره تدريس کيږي او د څلورو کالونود پرله پسې تدريس او تجربې په نتيجه کې مې وکولی شول چې دا کتاب د دوو سمسترونو له پاره تاليف کړم او د پاتې دوو نورو سمسترونو له پاره به انشا الله ډېرپه بيړه دوهم ټوک هم تاليف کړم.

دا کتاب په لسو فصلونو کې ليکل شويدی داسې چې اول فصل ئې د عمومي رياضياتو د اساساتو برخه تشکيلوي او داسې مفهومونه لکه سټ، غيرمساوات، مطلقه قيمت،د توانونو قاعدې او ځنې نور په کې شامل دي . دوهم فصل يې د قايمو مختصاتو سيستم، مخروطي مقاطع،مستقيم خطونه او د هغوی معادلې.او ځنې نور مفهومونه لري.دريم فصل يې د تابع څخه بحث کوي چې د خاصو مثالونو په ورکولو سره ډول ډول توابع او د تابع په اړوند ځنې اضافه معلومات په کې ځای شوي دي. په څلورم فصل کې يې د تابع ګانو ليميټ ،متماديت ، مشتق او د ډول ډول توابعو د مشتقاتو قوانين راغلي دي په پنځم فصل کې يې د مشتق کارونه اوپه انجينري پورې اړوند تطبيقات ځای په ځای شوي دي .شپږم فصل يې د پارامتريک معادلو او قطبي مختصاتو څخه تشکيل شوی دی چې په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطعو د معادلو ښوونه او نمايش هم په ځان کې لري .اووم فصل يې د معين ، غير معين انتيګرال او د انتيګرال نيولو طريقې رانښيي،په اتم فصل کې د انتيګرالونو ډول ډول کارونې،په نهم فصل کې يې په درې بعدي فضاپورې اړوند ځينې وکټوري مفهومونه ځای شوي دي او په لسم فصل کې يې په فضا کې د خط او مستوي معادلې ،وکټوري توابع ، د وکټوري توابعو مشتقات ، انتيګرال او ځينې نور خاص مفهومونه چې په انجينري کې ډېر زيات استعماليږي راغلي دي. دا هم زياتوو چې د هر فصل سره په اخېر کې د موضوعاتو مطابق مناسب او

هر اړخیز معلومات د تمرین په شکل اضافه شوي دي . همدارنګه نور داسې معلومات هم په دې کتاب کې ځای په ځای شوي دي چې په نورو پوهنځیو کې د مسلک مینه وال هم کولی شي چې د هغې څخه د درسي او ممد درسي مضمون په صفت استفاده وکړي . برسېره پردې ځنې ریاضیکي مفهومونه چې د ثبوت پرته په اکثرو کتابونو کې راغلي او دلته ما هڅه کړې ده ، چې هغه د ثبوت سره یو ځای راولم د مثال په توګه د وکتورونو په استعمال سره د ستورو د حرکت په اړه د کېپلر د اول، دوهم او دریم قانون ثبوت ، په ډېر ساده شکل سره زما لاس ته راوړنه ده او ځنې نور داسې مفهومونه چې هغه په اختصاصي او عالي ریاضیاتو پورې اړه لري او یا ډېر ساده دي ، د ثبوت څخه پرته د لزوم دید په صورت کې یوازې اشاره ورته شویده. سره له دې چې ما د دې کتاب په تالیف کې د خپل توان سره سم ډېر کوښښ کړیدی، ولې د علمي او تحقیقي منابعو د نشتوالي له کبله به دا کتاب ښايي په پښتو ژبه ځنې نیمګړتیاوې ولري او که احیاناً موجودې وي د هغوی په برخه کې د محترمو لوستونکو او د مسلک خاوندانو څخه بخښنه غواړم اوهیله ده چې هغه به د لوستونکو د پیشنهادونواو د مسلک خاوندانو سره د تماس په نتیجه کې په راتلونکي کې له منځه یوړل شي.

و من الله توفیق

لومړی فصل

اساسات

1. سټ (sets)

په ریاضیا تو کې سټ یو اساسي مفهوم دی، چې دریاضیکي بیانیو په ساده کولو او همدا رنګه د عالي ریاضیاتو په مطالعه کې یو لا زمي او اساسي رکن تشکیلوي، نوله دې کبله د عالي ریاضیاتو ددې نسخې په سر کې ځای ورکړل شوی دی ،چې په مختصر ډول یې تر کتنې لاندې نیسو.
دسټ مفهوم دتېرو پیړیو په وروستیوکې دلمړي ځل له پاره دکانتور(G.Cantor*) په واسطه را منځ ته شواوداسې تعریف کیږي.

1.1 تعریف

د یو تر بله بېلو او پېژندل شویو شیانو لست، فهرست یا را ټولونې ته سټ وایي. په سټ کې د ننه شیانو ته د هغې سټ عناصر ویل کیږي، چې اختیاري طبیعت لري او هر شی کیدای شي. لکه انسانان ، عددونه ، مکتبونه او نور هریو دسټ دعنا صرو په نوم یادیږي. سټ معمولاًد انګلیسي د الفبا په لویو تورو یعنې په (A, B, C, . . . , X,Y,Z) سره او عناصر یې د (a, b, c, . . . x, y, z) په کوچنیو تورو سره ښودل کیږي. [30]

1. مثال

i) د انګلیسي د الفبا حروف a,b,c,...,x,y,z .
ii) دځمکې دکرې پر مخ انسانان.
iii) دمیاشتې هغه ممکنه ورځې چې پر 7 باندې دویشلو وړوي . لکه 7 ،14،21،28.
iv) د ټولو هغو عددونو لست چې مربع یې په خپله دهغې عدد سره مساوي وي . لکه 0 او 1.

دا ټول د سټ یو مفهوم رانبیي چې د سټ په شکل ، په ترتیب سره په لاندې ډول لیکل کیږي.

A:={x / x د انګلیسي د الفبا حرف دی}
B:= {x/ x د ځمکې د کرې یو انسان دی}
$C := \{x / x$ د 31 څخه کوچنی او پر 7د ویش وړ دي$\}$
$D:=\{x \;/\; x = x^2\}=\{0,1\}$

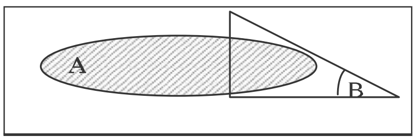
---

* . جرمني ریاضي دان 1895-1874

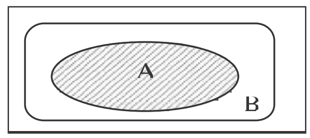
2.1 تعریف

که د A سټ هر عنصر په B کې شامل وي،په دې صورت کې A ته د B فرعي سټ ویل کیږي.

د مثال په توګه د $B = \{1,2,4,5,6,8\}$ او $A=\{2,4,6,8\}$ په سټونو کې، د A هر عنصر د B یو عنصر دی او A د B یو فرعي سټ دی ، داسې یې لیکو چې $A \subset B$. که A د B یو فرعي سټ نه وي نو هغه داسې لیکل کیږي: $A \not\subset B$. د (1)او (2) شکلونه وګورئ.



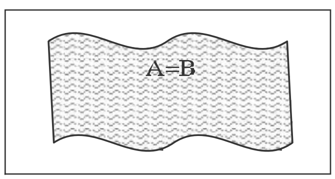
$A \not\subset B$
ش (1)



$A \subseteq B$
ش (2)

3.1 تعریف

A او B دوو سټونو ته مساوي سټونه($A=B$) ویل کیږي ،که $A \subset B$ او $B \subset A$ وي. یعنې که د A هرعنصر په B او د B هر عنصر په A کې شامل وي ، نو سره مساوي دي .(3)ش وګورئ.



ش (3)

4.1 تعریف

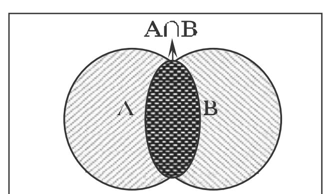
که چیرې x لږ تر لږه په A یا B کې شامل وي . وایو چې x د A او B دوو سټونو د اتحاد یو عنصر دی او د $x \in A \cup B$ په واسطه ښودل کیږي. یعنې

$A \cup B := \{x / x \in A$ یا $x \in B\}$

تردې وروسته د '' یا'' کلمه'' په "V"او د '' او '' کلمه په ''∧'' سره ښیو.

2. مثال د A او B دوو سټونو له پاره لرو چې :

$A= \{1,2,3,4,5,\}$.
$B=\{4,5,9,8\}$.
i) $A \cup B = \{1,2,3,4,5,9,8\}$.
ii) $B \cup A=\{1,,2,3,4,5,9,8\}$.
iii) $A \cup A=A$.
iv) $A \subset A \cup B$; $B \subset A \cup B$.
v) $A \cup B=B\cup A$.



ش (4)

5.1 تعریف

که x په A او B دواړوکې شامل وي ، وايو چې x د A او B دوو ستېونو د تقاطع يو عنصر دی چې د $x \in A \cap B$ په واسطه ښودل کيږي. يعنې

$$A \cap B := \{x \;/\; x \in A \;\wedge\; x \in B\}$$

د مثال په توگه په دوهم مثال کښي

$$A \cap B = \{4,5\} \;.$$

اوداهم صدق کوي چې :

i) $A \cap B = B \cap A.$

ii) $A \cap B \subset A\,;\; A \cap B \subset B\,.$

6.1 تعريف

يو سټ چې هيڅ عنصر ونه لري د خالي سټ په نوم ياديږي او په ϕ سره يې ښيو. د مثال په توگه پوهيږو چې د x هر عدد په خپله د x سره مساوي دی ،نو د $\phi = \{x \mid x \neq x\}$ يو خالي سټ دی. که ϕ او ϕ' دوه خالي ستېونه وي ،دهغه له پاره $\phi \subseteq \phi'$ او $\phi' \subseteq \phi$ صدق کوي اوهمدارنگه د خالي سټ له پاره لرو چې:

i) $A \cap \phi = \phi.$

ii) $A \cup \phi = A.$

iii) $\phi \subset A.$

دلته A يو اختياري سټ دي.

7.1 تعريف

د A او B دوو ستېونو ته يوله بله جلايا بېل ستېونه (disjoint) ويل کيږي ، په هغه صورت کې چې هيڅ مشترک عنصر ونلري . يعنې که $A \cap B = \phi$ وي ، نو A او B يو له بله سره جلا ستېونه دي.

3. مثال

د $A=\{5; \Delta , \blacksquare , 4\}$ ، $B=\{6,8,9,10\}$ دوه ستېونه يوله بله جلا(disjoint) ستېونه دي، ځکه چې $A \cap B= \phi$ کيږي . د $C=\{1,5,6,7\}$ او $D=\{1,8,6,9\}$ دوه ستېونه د disjoint خاصيت نلري.

8.1 تعريف

هغه تفاضل چې د A اختياري سټ څخه د B اختياري سټ د عناصرو د وضع کولو څخه منځ ته راځي ،د A او B د تفاضل سټ په نوم ياديږي او په $A \backslash B$ سره يې ښيو. يعنې

$$A \backslash B := \{x \;/\; x \in A \;\wedge\; x \notin B\}.$$

دمثال په توگه که $A=\{1,2,3,4,\dots\}$ او $B=\{2,4,6,8,\dots\}$ وي ، نو $A\backslash B=\{1,3,5,7,\dots\}$ کیږي.
همدارنگه لاندي خاصيتونه هم صدق کوي

i) $A\backslash B \subseteq A.$

ii) $(A\backslash B) \cap (A \cap B) = \phi.$

چې دا مفهومونه په (5) ش کې په ښکاره ډول ليدل کيږي.

$A\backslash B=A;\ A\backslash B\cap(A\cap B)=\phi$ $\qquad$ $B\subset A\ ;\ A\backslash B=M\ ;\ (A\backslash B)\cap(A\cap B)=\phi$

(5)ش

9.1 تعريف

که چېرې $B\subset A$ وي . نو $A\backslash B$ ته د B مکمله سټ (**Complement**) نظر A ته ويل کيږي او په CB سره يې ښيو يعنې

$$CB=\{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$$

اولاندې خاصيتونه صدق کوي . (6) ش وگورئ:[13].

i) $B\cup CB = A.$

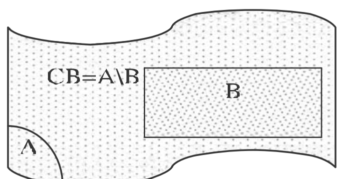
ii) $B\cap CB = \phi.$

iii) $CA = A\backslash A = \phi.$

iv) $C\emptyset = A\backslash \phi = A.$

v) $C(CB) = B.$

vi) $A\backslash B = A \cap CB = CB.$



(6) ش

2. عددونه او د هغوی نمايش (ښودنه)

عددونه برسېره په رياضياتو، نورو علومو لکه فزيک ، کيميا ، بيولوژي او خصوصاً د انجينري په نظري او عملي ساحوکښې ډير زيات د استعمال ځايونه لري او پرته د عددونو څخه د رياضياتو علمي ارزښت په کامله توگه له منځه ځي . نو ښه به وي چې په لنډ ډول سره يونظر ورته واچول شي.

i) طبيعي عددونه (Natural numbers)

هغــه عددونــه چــې ټــول انســانان ورســره ســروکارلري او پــه شــمير کــې زيــات اســتعماليږي د ......,1,2,3,4 څخـــه عبـــارت دي. دا ډول عـــددونو پـــه {... ,1,2,3,4}=:ℕ ســـره ښـــيو، چـــې د عــددونو دشــمېرلو پيــل اودنــورو عــددونو دسيســتم پــه مــنځ تــه راتلــوکې ډېــر مهــم رول لــري . د Kronecker[♣] پــه عقيـــده دا ډول عـــددونو تـــه ئـــې د طبعيـــت څخـــه د زيږيـــدنې اونـــورو پـــاتې ورځنــي عــددونو تــه ئــې يــې دبشــر د کــارونو دپــايلو نومونــه ورکــړي دي. دا دشــمېر يــا طبيعــي عددونه د مثبتو تامو عددونو په نوم هم يادېږي.[32]

10.1 تعريف

د n طبعي عدد ته جفت (يا طاق) ويل کيږي که چيرې د $n= 2m$ (يا $n = 2m - 1$) په شکل وليکل شي او $m \in \mathbb{N}$ دی. دمثال په توگه د 21 عدد طاق او36 يوجفت عدد دی. ځکه چې 21د 2m-1 او 36 د 2m په شکل ليکلی شو. يعنې:

$$21=2 \cdot 11 - 1 ; \quad m = 11$$
$$36=2\cdot 18 \quad ; \quad m=18$$

4. مثال

دجفت عدد مربع جفت او د طاق عدد مربع طاق ده.

ثبوت

که چیرې n يو جفت عددوي نو n د $n = 2k$,$(k\in \mathbb{N})$ په شکل ليکلی شو. لروچې:

$$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2(2k^2) .$$

دلتــه $m=2k^2$ يــوطبعي عــدد دی او n^2 د $n^2 =2m$ شــکل لــري ، نــو n^2 يــو جفت عــدد دی.
کــه n يــو طــاق عــدد وي ، نــو n د $n = 2k - 1$,$(k\in \mathbb{N})$ پــه شــکل ليکلــی شــو . داچــې کــه n طاق وي مربع يې هم طاق ده ، د تمرين په شکل پريښودل شو. ■

ii) د طبعي عددونو خاصيتونه

A_1) کــولای شــو چــې د $n_1 , n_2 \in \mathbb{N}$ دوه طبعــي عددونــه ســره جمــع کــړو او دهغــې د جمــع حاصل $n_1 + n_2$ هم يو طبعي عدددی .يعنې $n_1 + n_2 \in \mathbb{N}$.

A_2) اتحادي قانون د $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ له پاره لرو چې:

$$(n_1 + n_2) + n_3 = n_1 + (n_2 + n_3).$$

♣. جرمنی رياضي دان 911 810

A_3)(تبدیلي قانون)

$n_1 + n_2 = n_2 + n_1$.

(M_1) کولي شو چې هر دوه طبعي عددونه سره ضرب کړو او دهغې ځخه $n_1 \cdot n_2 \in \mathbb{N}$ په لاس راځي.

(M_2) (دضرب اتحادي قانون) که $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}$ وي ، نو:

$(n_1 \cdot n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot (n_2 \cdot n_3).$

(M_3) (د ضرب تبدیلي قانون)

D) (توزیعي قانون)

$(n_1 + n_2) \cdot n_3 = n_1 \cdot n_3 + n_2 \cdot n_3.$

11.1 تعریف

$n_1 \cdot n_2$ ضرب حاصل د $n_1 = n_2$ له پاره په n^2 او همدا رنګه په $n^m = \underbrace{n \cdot n \cdot n \cdots n}_{\text{ځلې - m}}$

سره ښیو.[33]

iii) تام عددونه

څرنګه چې د طبعي عددونو (ℕ) سره تر یوې اندازې پورې اشنا شوي یو او دطبعي عددونو د پراخوالي لزوم دید ، دمثال په ډول د $(x \in \mathbb{N}), x + 3 = 2$ ډوله معادلو حل د نه موجودیت شکل په ℕ کې لیدل کیږي . یعنې ددې ډول معادلو حل د تامو عددونو په سټ (ℤ) کې موندلی شو.

$\mathbb{Z} := \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \overline{\mathbb{N}}\ ;\ \overline{\mathbb{N}} = \{-x \mid x \in \mathbb{N}\}$

iv) نسبتي عددونه

د 3x=2 ډوله معادلو د حل نه موجودیت په ℤ کښې دنسبتي عددونو (ناطق) د منځ ته راتلو سبب کیږي . یعنې دمعمولي کسرونو سټ

$\mathbb{Q} := \left\{\frac{p}{Q} \mid p, q \in \mathbb{Z}; q \neq 0\right\}$.

منځ ته راځي او په ℚ سره ئې ښیو. یا په بل عبارت ℤ ته په داسې ډول انکشاف ورکړل شوی دی ، چې د هر p او q تامو عددونو له پاره چې $q \neq 0$ دی ، $\frac{p}{q}$ د یو مفهوم لرونکی دی. معلومیږي چې $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$. ځینې نور داسې عددونه هم شته چې هغه په ℚ کې ندي شامل او هغه د غیر ناطقو"Irrational" عددونو په نوم یادیږي او په $\overline{\mathbb{Q}}$ سره یې ښیو. لکه $\sqrt{5}$, e,π, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ [11] اونور.

د ناطقو عددونو ($\frac{p}{q}$) اړیکې د اعشاري کسرونو سره

دمثال په توگه پوهیږو چې:

$$23.58=23+\frac{58}{100}=23\cdot10^{0}+5\cdot10^{-1}+8\cdot10^{-2}.$$

$$0.578=5\cdot10^{-1}+7\cdot10^{-2}+8\cdot10^{-3}\quad.$$

په عمومي ډول سره که $z_1\ z_2 \dots z_k$ یو k رقمي تام عدد وي، نو: $g.z_1\ z_2\ z_3 \dots z_k$ یو نسبتي عدد دی‌چې اعشاري کسر ورته ویل کیږي او پریود ئې "0" دی.ځکه چې د z_k رقم څخه وروسته رقمونه د...000 په شکل هم لیکلی شو.د $\frac{p}{q}$ هر ناطق عدد یو اعشاري پریودیک کسر دی ، یعنې کولی شو چې د $\frac{p}{q}$ کسر د یو اعشاري پریودیک کسر په شکل ولیکو: د مثال په ډول

$$\frac{22}{7}=3.142857\ 142857\ldots=3.\overline{142857}$$

یا د دې برعکس هر اعشاري پریودیک کسر د یو ناطق عدد په شکل هم لیکل کیږي.

5. مثال

د ... $z=3.142857\ 142857$ عدد (اعشاري کسر) په ناطق عدد (په عام کسر)باندې تبدیلوو.

$$Z=3.142857\ \overline{142857}\qquad(1)$$

دلته 6 اعشاري رقمونه تکراریږي ، نو په پورتني رابطه کې 10^6ضرب کوو.

$$10^6z=3142857.142857\ldots\qquad(2)$$

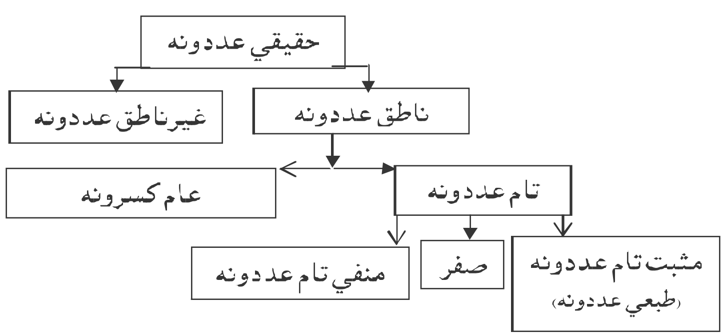
د (2) رابطې څخه (1) رابطه طرف په طرف تفریق کوو:

$$999999z=3142854$$

$$z=\frac{3142854}{999999}=\frac{22}{7}\cdot\frac{142857}{142857}=\frac{22}{7}.$$

v) حقیقي عددونه

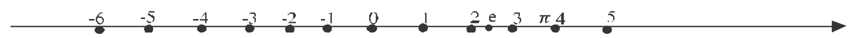
ټول ناطق اوغیر ناطق عددونه ، دحقیقي عددونو (**Real numbers**) سټ تشکیلوي. یعنې ټول عددونه چې تر اوسه پورې مو مطالعه کړل ، دحقیقي عددونو په سټ ($\mathbb{R}$) پورې اړه لري . په لاندې دیاگرام کې ، ټول عددونه او دهغوی وېش د فرعي سټونو په شکل لیدلی شئ. داهم باید وویل شي چې دمختلطو عددونو (Complex) سټ هم موجود دی ، چې وروسته به تر بحث لاندې ونیول شي.



دعددونو خط (عددونو محور)

که په يو مستقيم خط باندې يوه مبدا وټاکو، د اوږد والي ديوه مناسب واحد په درلودلوسره کولی شو چې ټول حقيقي عددونه په نوموړي خط باندې وښيو.

.داډول مستقيم خط ته د عددونوخط يادعددونو محور ويل کيږي.



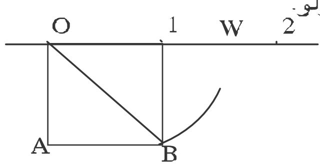
(7)ش

دلته دهر حقيقي عدد له پاره دعددونو په محور يوه اويوازې يوه نقطه او دمحور دهرې نقطې له پاره دحقيقي عددونو په سټ ($\mathbb{R}$) کې يو اويوازې يو عدد موجود دی. يعنې دحقيقي عددونو د سټ او دعددونو دمحور دنقطو ترمنځ يو په يو مطابقت وجود لري ، نوځکه کله کله عددونه د نقطو او نقطې دعددونو پرځای د محور پر مخ استعمالوي. دحقيقي عددونو پرمحورمبدا (O) اوهغه برخه چې د مبدا ښی خواته پرته ده د مثبتو عددونو او چې د مبدا کيڼې خواته پرته ده دمنفي عددونو برخه ده.

6. مثال

څنګه کولای شو چې د $\sqrt{2}$ غير ناطق عدد دعددونو دمحور پرمخ وښيو ؟

ددې مطلب له پاره د عددونو په محور باندې دمبدا يعنې د O نقطې څخه ښی خواته ديوه واحد په اندازه يوه مربع جلا کووا و د مربع دقطر په اندازه يوه دايره چې مرکز يې په O کې پروت دی رسموو. ددايرې د تقاطع نقطه دعددونو دمحور سره W بولو.



(8) ش

اوس فرض کوو چې W نقطه ديو ناطق عدد تصوير دي، او د (8)شکل له مخې ليکو چې:

$$\overline{OA}^2+\overline{AB}^2=\overline{OB}^2$$
$$\Rightarrow \overline{OB}^2=2$$
$$\Rightarrow w^2=2.$$

مونږ بايد وښيو چې په W نقطه پورې اړوند يوغير ناطق عدد (w) شته ،چې په هغې سره $w^2=2$ صدق کوي. ددې کار له پاره فرض کوو چې w يوناطق عدد دی ،چې $w^2=2$ صدق کيږي، نو د $p,q\in \mathbb{Z}; q\neq 0$ عددونه موجود دي چې $w=\frac{p}{q}$ کيږي. په دې ځای کې فرض کوو چې د $\frac{p}{q}$ کسر دامکان تر حده پورې ساده شوی کسر دی. يعنې دواړه عددونه جفت نه دي او که

دواړه جفت وي په دې صورت کې د $\frac{p}{q}$ کسرته ترهغې پورې داختصار دوام ورکوو ترڅوچې یو جفت اوبل طاق عدد په لاس را شي. لیکو چې:

$w^2 = 2 \Rightarrow \frac{p^2}{q^2} = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2 \Rightarrow p^2$ جفت دي $\Rightarrow p$ جفت دی

$\Rightarrow p = 2m \; ; \; m \in \mathbb{N}.$

$p^2 = 2q^2 \Rightarrow 4m^2 = 2q^2 \Rightarrow q^2 = 2m^2 \Rightarrow q^2 \Rightarrow$ بنا پردې q جفت دي

له دې ځایه نتیجه اخلو ، چې q او p دواړه په 2 دوېش وړ دي اوداد فرضیې سره تضاد لري .نو زمونږ فرضیه غلطه ده. یعنې د w عدد یو غیر ناطق عدد دي.

پورتني ثبوت د غیر مستقیم ثبوت په نوم یادیږي. ■

1.1 دعوی

د هرو دوو ناطقو عددونو تر منځ یو بل ناطق عدد موجود دی.

ثبوت

فرضوو چې a او b دوه نسبتي(ناطق) عددونه دي ، چې $a < b$ دی. لرو چې:

$a < b \Rightarrow a + a < a + b$

$a < b \;\; \Rightarrow a + b < b + b$

$\Rightarrow 2a < a + b < 2b$

$a < \frac{a+b}{2} < b.$

دلته $\frac{a+b}{2}$ یو ناطق عدد دی . ځکه چې a او b دواړه ناطق عددونه دي. ■

vi) د حقیقي عددونو خاصیتونه

د a ، b او c حقیقي عددونو له پاره لاندې خاصیتونه تل صدق کوي.

1) $a+b$ او $a\cdot b$ په $\mathbb{R}$ کې شامل دي. یعنې $\mathbb{R}$ د جمع او ضرب تر عملیې لاندې یو تړلی سټ دی.

2) (د جمع تبدیلي قانون): $a+b=b+a.$

3) (دجمع اتحادي قانون): $a+(b+c)=(a+b)+c$

4) صفر(0) دجمع د عینیت (خنثی) عنصر دی یعنې $a+0 = 0+a$.

5) دهر a له پاره د x یو عدد په $\mathbb{R}$ کې شته، چې $x+a=a+x=0$ کیږي.x ته د جمع په عملیه کې د a معکوس وایي، چې په (-a) سره ښودل کیږي یعنې$x=-a$.

6) (دضرب تبدیلي قانون): $a \cdot b = b \cdot a$.

7) (دضرب اتحادي قانون): $a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c$.

8) د یو (1) عددته د ضرب په عملیه کې دضرب د عینیت(یا خنثی) عنصر وایي.

9) دهر $a \neq 0$ له پاره یو x په$\mathbb{R}$ کې شته، چې $a\cdot x=x\cdot a=1$ د هغې له پاره صدق کوي اوx ته د ضرب په عملیه کې د a معکوس وایي ، چې په a^{-1} یاپه$\frac{1}{a}$ سره ښودل کیږي. یعنې
$x=a^{-1}=\frac{1}{a}$.

10) (توزیعي قانون) $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$

تبصره

هر سټ چې دا پورتني خاصیتونه ولري د ساحې (**Field**) په نوم یادیږي، نو $\mathbb{R}$ یوه ساحه ده.
ځرنګه چې a او a- یو د بل جمعي معکوس عددونه دي ، نو د a- جمعي معکوس د$(-a)=a$- عدد څخه عبارت دی او لاندیې خاصیتونه د پورتنیو(10) قوانینو په نتیجه کې په لاس راځي.

(i $0\cdot a=0.$

(ii $(-a)\cdot b=a(-b)=-a\cdot b$

(iii $(-a)(-b)=a\cdot b$

7. مثال

که$a\cdot b=0$ وي . د پورتنیوخاصیتونو په مرسته وښیې چې لږترلږه $a=0$ یا$b=0$ دی.

حل

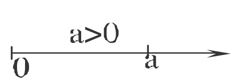
که چیرې $a=0$ وي ، نو ثبوت مکمل واضح دی. که $a\neq 0$ وي ،نو د $a\cdot b=0$ دواړه خواوې په $\frac{1}{a}$ کې ضربوو .

$$\Rightarrow b\cdot a\cdot\frac{1}{a}=0\Rightarrow b\cdot 1=0$$

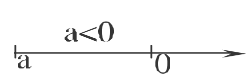
$$\Rightarrow b=0.$$

3. غیر مساوات

که $a\neq 0$ یو حقیقي عددوي، په دې صورت کې a مثبت یا منفي دی ، چې په ترتیب سره د $a>0$ یا $a<0$ په شکل باندې لیکل کیږي. که a ته د عددونو په محور باندې دیوې نقطې په څیر وګورو په دې صورت کې د $a>0$ څخه پوهیږو چې a د مبدا په ښی خوا کې اوکه $a<0$ وي نو a دمبدا په کینه خواکې پروت دی.



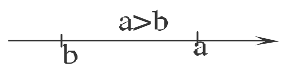
(9)ش



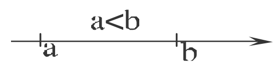
(10)ش

د " >" او "<" علامې

که چېرې a او b دوه حقیقي عددونه وي .نو $a-b>0$ یا $a-b<0$ اویا $a-b=0$ کیږي.په اول حالت کې مونږ وایو چې a د b څخه لوی دی او داسې لیکل کیږي $a>b$. په



ش(11)



ش(12)

دوهم حالت کې وایو چې a د b څخه کوچنی دی اوپه $a<b$ سره یې ښیو. دریم حالت په $a=b$ سره لیکو.

په هندسي ډول سره که $a>b$ وي ، نو a د b په ښی خوا او که $a<b$ وي a، د b په کینه خواکې د عددونو په محور باندې پراته دي.

8. مثال

لاندې افادې هره یوه دیوه غیرمساوات څخه نماینده ګي کوي.

$\sqrt[2]{2} > 0$; $-3 < 0$; $-2 > -3$; $4 > \pi$

$-1 > -100$; $-\frac{1}{7} < -\frac{1}{8}$; $-1 < -0.09$; $3.999 > 3.2998$.

2.1 دعوی

که چېرې a، b او c حقیقي عددونه وي لروچې:

a) $-(-a)=a$.

b) که $a>b$ او $b>c$ وي ، نو $a>c$ کیږي.

c) که $a>b$ وي ، نو $a+c > b+c$ دی.

d) که $a>b$ او $c>d$ وي ، نو $a+c > b+d$ دی.

e) که $a>b$ او $c>0$ وي ، نو $a\cdot c > b\cdot c$ دی.

f) که $a>b$ او $c<0$ وي ، نو $a\cdot c < b\cdot c$ دی.

g) که $a>0$ وي، نو $-a<0$ دی.

h) که $a<0$ وي، نو $-a>0$ دی.

i) که $a>0$ او $b<0$ وي نو $a\cdot b<0$ دی.

j) که $a<0$ او $b<0$ وي ، نو $a\cdot b>0$ دی.

k) که $a\neq 0$ وي ، نو $a^2>0$ دی.

l) که $a>0$ وي، نو $\frac{1}{a}>0$ دی.

m) که $a>b>0$ وي، نو $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$ دي.

ثبوت

a) $-(-a)=-(-a)+0=-(-a)+(-a+a)=(-(-a)+(-a))+a=0+a=a$.

$a>b\Rightarrow a-b>0\Rightarrow(a-b)\in\mathbb{R}^{+};b>c\Rightarrow b-c>0\Rightarrow(b-c)\in\mathbb{R}^{+};(a,b,c\in\mathbb{R})$ (b

$\Rightarrow((a-b)+(b-c))\in\mathbb{R}^{+}$

$\Rightarrow(a-c)+(b-b)\in\mathbb{R}^{+}$

$\Rightarrow a-c\in\mathbb{R}^{+}\Rightarrow a-c>0\Rightarrow a>c$.

$a>b\ ;c\in\mathbb{R}\Rightarrow a-b>0$ (c

$(a-b)+0=a-b+c-c=a+c-(b+c)>0.$

$\Rightarrow a+c>b+c$.

$a>b\Rightarrow a-b>0$ (d

$c>d\Rightarrow c-d>0$

$\Rightarrow(a-b)+(c-d)>0$

$a+c-(b+d)>0$.

$\Rightarrow a+c>b+d$

$a>b\ ;c>0\Rightarrow a-b\in\mathbb{R}^{+}\ ;\ c\in\mathbb{R}^{+}$ (e

$a-b>0;\ c>0\Rightarrow ac-bc>0\Rightarrow ac>bc$.

$a>b\ ;\ c<0\Rightarrow a>b\ ;-c>0$ (f

$\Rightarrow a-b>0\ ;\ -c>0\ \Rightarrow(a-b)(-c)>0$

$bc-ac>0\Rightarrow ac<bc$

(g ثرنگه چې $a>0$ دی ،وایو چې $a\neq 0$ او فرض کوو چې $-a>0$ دی. لروچې:

$a+(-a)>0\Rightarrow 0>0.$

دا ناممکنه ده چې $a+(-a)>0$ شي ، نو $-a<0$ دی.

(h ددي برخې ثبوت د (g) په شان دی.

(i ثرنگه چې $b<0$ دي ، نو $-b>0$ کیږي. لیکوچې

$a(-b)>0\Rightarrow -ab>0\ \Rightarrow\ (-ab)(-1)<0\Rightarrow\ ab<0$.

$a<0\ ;b<0\ \Rightarrow -a>0\ ;-b>0$ (j

$\Rightarrow(-a)(-b)>0\ \Rightarrow -(-ab)>0\Rightarrow -ab<0\ \Rightarrow ab>0.$

(k ثرنگه چې $a\neq 0$ دی او د a له پاره د لاندې دوو حالتونو څخه یو حالت صدق کوي.

$a>0$ یا $a<0$

$a > 0 \Rightarrow a.a > 0 \Rightarrow a^2 > 0.$ (i

$a < 0 \Rightarrow -a > 0 \Rightarrow -a.(-a) = a^2 > 0.$ (ii

معلومیږي چې په هر حالت کې $a^2 > 0$ دی.

(l فرضوو چې $a > 0$ او $\frac{1}{a} < 0$ دی، نو نظر په f سره لیکو چې:

$\frac{1}{a} \cdot a < 0 \Rightarrow 1 < 0.$

چې دا امکان نه لري . په نتیجه کې $\frac{1}{a} > 0$ دی.

$a > b > 0 \Rightarrow a - b > 0$ (m

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} = (a-b) \cdot \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{b} > 0.$

ځکه چې د مثبتو عددونو د ضرب حاصل دی .

$\frac{1}{b} - \frac{1}{a} > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$ ■. [27]

9. مثال

د $3x-5<\pi$ غیر تساوي دپورتنی دعوې په نظر کې نیولو سره حل کړی. یعنې د x هغه قیمتونه په لاس راوړی چې راکړل شوي غیر تساوي په کې صدق وکړي

حل

$$3x-5 < \pi \overset{(c)}{\Rightarrow} 3x - 5 + 5 < \pi + 5$$
$$\Rightarrow 3x < \pi + 5 \overset{(e)}{\Rightarrow} \frac{1}{3} \cdot 3x < \frac{\pi+5}{3} \Rightarrow \left(3 \cdot \frac{1}{3}\right) \cdot x < \frac{\pi+5}{3}$$
$$\Rightarrow x < \frac{\pi+5}{3}.$$

په نتیجه کې د راکړل شوي غیر تساوي حل د $\left\{x \,/\, x < \frac{\pi+5}{3}\right\}$ څخه عبارت دی.

10. مثال

د $x^2 - x - 6 > 0$ غیر تساوي حل کړي.

حل

$$x^2 - x - 6 > 0 \Rightarrow (x+2)(x-3) > 0$$

دلته 2.1 دعوې په پام کې نیولو سره لاندې حالتونه په نظر کې نیسو:

$$\left.\begin{array}{l} x+2 > 0\,;\ x-3 > 0 \\ \Rightarrow x > -2\ ;\ x > 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x > 3$$ (i

او د غیر تساوي حل د $\{x/x > 3\}$ سټ دی.

$$\left.\begin{array}{l} x+2 < 0 \quad ; x-3 < 0 \\ \Rightarrow x < -2 \quad\ ;\ x < 3 \end{array}\right\} \Rightarrow x < -2$$ (ii

په دې حالت کې دغیر تساوي حل د $\{x \,/\, x < -2\}$ سټ دی. په نتیجه کې دغیر تساوي حل د $\{x \,/\, x < -2 \ \vee\ x > 3\}$ سټ څخه عبارت دی.

تردې وروسته دهمدارنگه غير تساوي گانو حل اويا هغه غيرتساوي گانې چې كسري شكلونه ولري ، د اشارې ديوه جدول په ترتيب كولو سره په لاس راوړو. اودتمرين په شكل د پورتنی غير تساوي ، د حل پيداكولو له پاره داشارې دتعين يوجدول ترتيب كړی.

11. مثال

د $\frac{x+1}{2-x} > 1$ غير تساوي حل كړی.

$$\frac{x+1}{2-x} > 1 \Rightarrow \frac{x+1}{2-x} - 1 > 1 - 1.$$
$$\Rightarrow \frac{x+1}{2-x} - 1 > 0$$
$$\frac{x+1-(2-x)}{2-x} = \frac{x+1-2+x}{2-x} = \frac{2x-1}{2-x} > 0 \quad .$$

په نتيجه كې د اول- جدول له مخې د غير تساوي حل د $\left\{x \ / \ \frac{1}{2} < x < 2\right\}$ سټ څخه عبارت دی.

x	$-\infty < x < \frac{1}{2}$		$\frac{1}{2} < x < 2$		$2 < x < \infty$
2x-1	$-$	0	$+$		$+$
2-x	$+$		$+$	0	$-$
$\frac{2x-1}{2-x}$	$-$	0	$+$		$-$
	غير تساوي صدق نه كوي		غير تساوي صدق كوي		غير تساوي صدق نه كوي

اول- جدول

4. طاقت او جذرونه

دلته غواړو چې په لنډ ډول سره د طاقت ، توان او دهغې د خواصوپه اړه يوڅه ووايو.

12.1 تعريف

كه چېري $a\in \mathbb{R}$ ، $m\in \mathbb{Z}$ وي .

i) $a^m := a.a.a\ldots a = \prod_{i=1}^{m} a$; (د m>0 پاره له)

ii) $a^m := \frac{1}{a^{-m}}$; (كه چېري $m < 0$ او $a \neq 0$ وي)

iii) $a^m := 1$; (كه چېري $a \neq 0, m = 0$ وي)

دلته a ته قاعده (Base) ، m ته توان(Exponent) او a^m ته د a, m ام طاقت(power) ويل كيږي.

د طاقتونوقوانين

كه چېري $a_1, a_2, a \in \mathbb{R}$ او $m, m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ وي ، نو لرو چې

$$a^{m_1} \cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2}$$
$$a_1^m \cdot a_2^m = (a_1 a_2)^m$$

$(a^{m_1})^{m_2} = a^{m_1 \cdot m_2}$ [30]

3.1 دعوی

که $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ او $m \in \mathbb{N}$ وي ، نو:

$a_1^m < a_2^m \Leftrightarrow a_1 < a_2$.

ثبوت " $\Rightarrow$ " $1 < \frac{a_2^m}{a_1^m} = (\frac{a_2}{a_1})^m \Rightarrow 1 < \frac{a_2}{a_1} \Rightarrow a_1 < a_2$.

(اندکشن)" $\Leftarrow$ "i) دعوی د m=1 له پاره سمه ده.

ii) فرض کوو چې د یوه $m \geq 1$ له پاره دعوی سمه ده

iii) ثبوت کوو چې دعوی د m+1 له پاره هم سمه ده. لیکو چې

$a_1^{m+1} = a_1^m \cdot a_1 < a_2^m \cdot a_1 < a_2^m \cdot a_2 \leq a_2^{m+1}$. ■

4.1 دعوی

که $a > 1, m \in \mathbb{Z}$ وي ، نو $1 < a^m \Leftrightarrow m > 0$ کیږي.

ثبوت " $\Leftarrow$"

د $m > 0$ له پاره نتیجه د 3.1 دعوې څخه په لاس راځي:

$1 < a \Rightarrow 1 < a^m$

که m=0 وي $a^m = 1$ کیږي او که $m < 0$ وي ، نو:

$1 < a^{-m} \Rightarrow 1 < \frac{1}{a^m} \Rightarrow a^m < 1$. ■

5.1 دعوی

که چېرې $1 < a \in \mathbb{R}$ ، $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$ وي ، نو $m_1 < m_2 \Leftrightarrow a^{m_1} < a^{m_2}$ کیږي.

ثبوت

اول حالت " $\Rightarrow$"

څرنګه چې

$a^{m_1} < a^{m_2} = a^{m_1} \cdot a^{m_2 - m_1} \Rightarrow 1 < a^{m_2 - m_1}$

کیږي او دا د 4.1 دعوې له مخې هغه وخت صدق کوي چې:

$m_2 - m_1 > 0 \Rightarrow m_1 < m_2$. ■

دوهم حالت " $\Leftarrow$"

د دې حالت له پاره د پورتني حالت د نتيجې څخه شروع کوو او د فرضيې په طرف درومو په پای کې $a^{m_1} < a^{m_2}$ حاصليږي.

13.1 تعريف

که چېرې $a\in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ او $n\in \mathbb{N}$ وي، نو يوازې يو $x> 0$ موجود دی چې x^n=a کيږي.دا ډول x ته د n, a-ام جذر ويل کيږي او په $x = a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$ سره يې ښيو. يعنې

$$(x^n=a \Leftrightarrow x=\sqrt[n]{a}\ ;\ x\geq 0).$$

يادونه

د a=0 حالت کې د x^n =0 معادلې حل يوازې x=0 دی.

که $a> 0$ او n جفت وي، نو د x^n =a معادله بر سېره پردې چې د $x_1 = \sqrt[n]{a}$ مثبت حل ولري د $x_2 = -\sqrt[n]{a} = -x_1$ منفي حل هم لري. يعنې

$$x_2{}^n=(-x_1)^n=(-1)^n x_1^n=x_1^n\ .$$

همدارنګه د $a> 0$ او n طاق په حالت کې د $x^n = a$ معادله يوازې د $x=\sqrt[n]{a}$ مثبت حل لري.

12. مثال

$\sqrt{4}=2$ دی او $-2 \neq \sqrt{4}$ دی ، سره له دې چې $(-2)^2=4$ کيږي.ځکه چې د 13.1 تعريف له مخې $\sqrt{4}$ منفي نه شي کيدای ،يعنې د $\sqrt{-4}$ دوهم جذر يو حقيقي عدد نه دی او دا ډول عدد ته کامپلکس عدد ويل کيږي چې وروسته به پرې بحث وشي.

6.1 دعوی

که چېرې $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+$ او $n\in \mathbb{N}$ وي، نو $a_1 < a_2 \Leftrightarrow a_1^{\frac{1}{n}} < a_2^{\frac{1}{n}}$ کيږي.

ثبوت

$$a_1^{\frac{1}{n}} < a_2^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow a_1=((a_1^{\frac{1}{n}}))^n < ((a_2^{\frac{1}{n}}))^n= a_2 \Leftrightarrow a_1 < a_2 \quad \blacksquare$$

7.1 دعوی

که $a > 1$او $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ وي ،نو $\frac{1}{n_1} < \frac{1}{n_2} \Rightarrow a^{\frac{1}{n_1}} < a^{\frac{1}{n_2}}$ کيږي.

ثبوت

$$a^{n_2}=((a^{\frac{1}{n_1}})^{n_1})^{n_2}=(a^{\frac{1}{n_1}})^{n_1 n_2}$$
$$a^{n_1}=((a^{\frac{1}{n_2}})^{n_2})^{n_1}=(a^{\frac{1}{n_2}})^{n_1 n_2}$$

او د 3.1 دعوې له مخې ليکو چې:

$a^{\frac{1}{n_1}} < a^{\frac{1}{n_2}} \Rightarrow (a^{\frac{1}{n_1}})^{n_1 n_2} < (a^{\frac{1}{n_2}})^{n_1 n_2}$
$\Rightarrow a^{n_2} < a^{n_1} \Rightarrow n_2 < n_1 \Rightarrow \frac{1}{n_2} > \frac{1}{n_1}$ ■ .

14.1 تعریف

که چېرې $a \in \mathbb{R}^+$ ، $r \in \mathbb{Q}$; $\left(r = \frac{p}{q}\right)$, $p \in \mathbb{Z}$ او $q \in \mathbb{N}$ وي تعریف کوو چې:

$a^r := a^{\frac{p}{q}} = \left(a^{\frac{1}{q}}\right)^p$.

(په داسې حال کې چې د $r \in \mathbb{R}$ $(r \neq 0)$ له پاره $0^r = 0$ دی)

یادونه

دپورتني تعریف په نظر کې نیولو سره که د n په عوض r وضع کړو ،نو په توانونو او جذرونو پورې اړوند ټولې پورتنۍ دعوې صدق کوي.[33]

5. مطلقه قیمت

15.1 تعریف

د a له پاره مطلقه قیمت ،چې د " |.| "علامې په واسطه ښودل کیږي ،داسې تعریف کوو:

$|a| := \begin{cases} a & ; a \geq 0 \\ -a & ; a < 0 \end{cases}$

د مثال په توګه $|0|=0$; $|-1.45| = -(-1.45) = 1.45$

$|(-3)^2| = |9| = 9$

$|(-3)^3| = |-27| = -(-27) = 27$

همدارنګه که $x - 2 < 0$ وي ، نو $|x-2| = -(x-2) = 2 - x$ کیږي.

13. مثال

$|a| = \sqrt{a^2}$ کیږي.

i) که $a \geq 0$ وي ، لیکو چې:

$|a| = a \Rightarrow a = \sqrt{a^2} \Rightarrow |a| = \sqrt{a^2}$

ii) که $a < 0$ وي ، نو $- a = \sqrt{(-a)(-a)} = \sqrt{a^2}$; $|a| = -a$ کیږي. $\Leftarrow \sqrt{a^2} = |a| = -a$

نتیجه

د i) او ii) حالتونو څخه دې نتیجې ته رسیږو چې:

$\sqrt{a^2} = |a| \Rightarrow |a|^2 = a^2$.

8.1 دعوی

د $x,y\in\mathbb{R}$ له پاره لاندیني قوانین صدق کوي:

i) $|x| = |-x| \geq 0$

ii) $x\leq |x|; -x < |x|$

iii) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

iv) $|x\,y| = |x||y|$

v) $|x|^{-1} = |x^{-1}| \ ; x \neq 0$

ثبوت د تمرین په ډول ■

9.1 دعوی (مثلثي غیر تساوي)

که چېرې $x,y,z\in\mathbb{R}$ وي ، نو $|x + y| \leq |x| + |y|$ کیږي .

ثبوت

i) $x + y\geq 0 \Rightarrow |x + y| = x + y \leq |x| + |y|$

ii) $x + y < 0 \Rightarrow |x + y| = -(x + y) > 0$

$\Rightarrow |x + y| = -x - y \leq |x| + |y|$

$\Rightarrow \quad |x + y| \leq |x| + |y| \quad$ ■ .

یادونه

په پورتني غیر مساوات کې، که د x په عوض x-y وضع کړو، لیکو چې:

$|x + y| \leq |x| + |y|$

$x:= x-y$

$\Rightarrow |x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$

$\Rightarrow |x - y| > |x| - |y|.$

10.1 دعوی

که $a\in\mathbb{R}^+$ وي ، نو $|x| < a$ او $x\in(-a,a)$ $(-a< x < a)$ سره معادل دی . یعني

$\left(x \in (-a,a) \Leftrightarrow |x| < a\right).$

ثبوت

i) "$\Leftarrow$" $\quad |x| < a \Rightarrow -a < -|x| < x < a \quad \Rightarrow x \in (-a,a).$

ii) "$\Rightarrow$" $x \in (-a, a), x \geq 0 \Rightarrow x < a$
$x \in (-a, a), x < 0 \Rightarrow |x| = -x < a$
$\Rightarrow |x| < a$ ■ .

14. مثال

د $|x^2 - 2| \leq 7$ غیر تساوي، د حل سټ په لاس راوړی.

حل

$$|x^2 - 2| \leq 7 \Rightarrow -7 \leq x^2 - 2 \leq 7 \Rightarrow -5 \leq x^2 \leq 9.$$

دلته دوې غیر تساوي موجودې دي.

i) $-5 \leq x^2 \Rightarrow$ دحل سټ يې ټول حقيقي عددونه دي.

$x^2 < 9 \Rightarrow |x|^2 < 9 \Rightarrow |x| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq x \leq 3$.

ii) ددې له پاره چې i)او ii) همزمان صدق وکړي نو حل يې د $\{x / -3 \leq x \leq 3\}$ سټ دی .

15. مثال

د $|x| + |x - 1| = 2$ معادله حل حل کړی .

حل

$$|x| + |x - 1| = 2$$

$$\Rightarrow |x| - 2 = -|x - 1|$$

$$(|x| - 2)^2 = (-|x - 1|)^2$$

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = |x - 1|^2 = (x - 1)^2$$

$$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 - 2x + 1 \qquad \ldots \qquad (3)$$

دلته دوه حالته موجود دي.

i) د $x \geq 0$ صورت کې،په(3) رابطه کې د $|x|$ په عوض x ليکو.

$x^2 - 4x + 4 = x^2 - 2x + 1$
$-4x + 2x = -3 \Rightarrow -2x = -3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

ii) که $x < 0$ ، نو $|x| = -x$ کيږي او په(3) کې د $|x|$په عوض x- په وضع کوو:

$|x|^2 - 4|x| + 4 = x^2 - 2x + 1$
$(-x)^2 - 4(-x) + 4 = x^2 - 2x + 1$

$x^2 + 4x + 4 = x^2 - 2x + 1$
$4x+2x=1-4$
$6x=-3 \Rightarrow x = \frac{-1}{2}.$

په نتیجه کې د راکړل شوي معادلې حل د $\left\{\frac{3}{2}, \frac{-1}{2}\right\}$ سټ دی.

16.1 تعریف

که $I \subset \mathbb{R}$; $I \neq \phi$ وي، په دې صورت کې که د هر $x,y \in I$ له پاره
$x < z < y \Rightarrow z \in I$
صدق وکړي،نو وایو چې I یو انټرول دی او $a,b \in \mathbb{R}$ له پاره لیکو چې:

$(a,b) := \{x \in \mathbb{R} / a < x < b\}$ (خلاص انټروال)

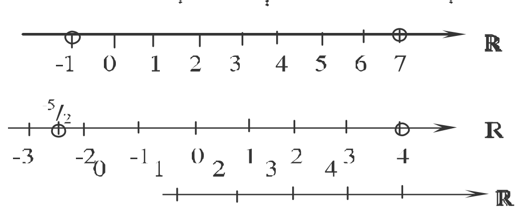
$[a,b] := \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$ (تړلی انټرول)

$(a,b] := \{x \in \mathbb{R} / a < x \leq b\}$ نیم خلاص (یا نیم تړلی انټروال)

د بې نهایت علامې(∞)او($-\infty$)هم په ریاضیاتو کې زیاتې استعمالیږي،دا عدد نه دی بلکه یوه علامه ده چې د یوه غیر معلوم لوی (یا کوچنی) عدد ځخه نمایندګي کوي اوځنې انټرولونه چې ددې په کومک سره ښودلی شو، په لاندې ډول دي.

$(-\infty, a) := \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$
$(a, \infty) := \{x \in \mathbb{R} / x > a\}$

$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$.
همدارنګه د حقیقي عددونو په محور باندې د انټرولونو نمونې په لاندې ډول لیدلی شئ.



(دلته 7 او 1- شامل ندي)

(دلته 4 او $\frac{5}{2}$- شامل ندی)

(دلته 4 او 0 شامل دي)

ش(13)

16. مثال

لاندې انټرولونه د حقیقي عددونو په محور باندې وښئ:
$(-\infty, -3]$; $(1,5)$; $(-2,2)$; $(-\infty, -3)$; $\left(\frac{1}{2}, \frac{8}{3}\right)$.
(دتمرین په توګه)

17.1 تعریف

که $x_0 \in \mathbb{R}$ وي

i) $U_\varepsilon(x_0) := \{x/x \in \mathbb{R}; |x - x_0| < \varepsilon\}$

د x_0 له پاره ε- مجاورت(اپسیلون مجاورت) په نوم یادیږي او په حقیقت کې د $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$ یو انترول دی. $U \subset \mathbb{R}$ ته د x_0 مجاورت ویل کیږي په هغه صورت کې چې د x_0 له پاره یو د ε مجاورت په خپل ځان کې و لري. یعني اقلاً یو ε- مجاورت د x_0 له پاره موجود وي ،چې $U_\varepsilon(x_0) \subset U$ صدق وکړي. د مثال په توګه که c یو حقیقي عدد وي، نو د (a,b) هر خلاص انترول چې c د هغې یو عنصر وي د c یو مجاورت دی. لکه د (-1,2) انترول د 1 یو مجاورت دی.

18.1 تعریف

د c د (a,b) یو مجاورت چې c په کې شامل نه وي ، د c د یو حذف شوي (Deleted neighborhood)مجاورت په نوم یادیږي. د (a,b)=(a,c)U (c, d) په حالت کې(a,b) د c یو حذف شوي مجاورت دی. [32]

ش (14)

5. تمرین

لاندې سټونه د عناصرو د لست په شکل ولیکئ

1. $\{x/x^2 - 5x + 6 = 0\}$
2. $\{x/x=-x\}$
3. $\{x/x=x^3\}$
4. $\{x/x^2=9\}$
5. $\{x/x=x^4\}$
6. $\{x/x+7=18\}$

د $A=\{1,2,\{3\},\{4,5\}\}$ په سټ کې ځنې عناصر په خپله د سټ شکل لري. معلوم کړئ چې په لاندینیو افادو کې کوم یوه سمه او کوم یوه ناسمه ده.

7. $\{1,2\} \in A$
8. $1 \in A$
9. $\{1, \{3\}\} \subset A$
10. $3 \in A$
11. $\phi \in A$
12. $\{2\} \in A$
13. د $A=\{a, b, c\}$ سټ ټولمره فرعي سټونو لري لست یې کړئ.

لاندې ناطق عددونه په اعشاري کسرونو باندې واړوی .

.14	$\frac{1}{9}$	.15	$\frac{1}{125}$	.16	$\frac{1}{4}$
.17	$\frac{1}{11}$	.18	$\frac{1}{64}$	.19	$\frac{-1}{5}$
.20	$\frac{-1}{22}$	.21	$\frac{1}{3}$	.22	$\frac{1}{8}$
.23	$\frac{1}{3}$	.24	$\frac{1}{6}$	.25	$\frac{1}{25}$

26. ایا د دوو غیر ناطقو عددونو د ضرب حاصل همېشه غیر ناطق عدد دی .؟

27. ایا د دوو غیر ناطقو عددونو دجمع حاصل همېشه غیر ناطق عدد دی .؟

وښئی چې:

28. که چېرې $0< a < b$ وي نو $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ کیږي.

29. که چېرې $a< b$ وي، نو $-a>-b$ کیږي.

30. که چېرې $a< b$ وي نو $c-b< c-a$.

31. که چېرې $0< a < 1$ وي،نو د هر طبعي عدد $n\geq 2$ له پاره $\sqrt[n]{a} > a$ دی.

32. د تقسیم عملیې پرته معلوم کړی چې په لاند ینیو عددونو کښې کوم یوعدد لوی دی؟

i) $\frac{7}{9} \vee \frac{18}{49}$ ii) $\frac{33}{100} \vee \frac{10}{3}$

iii) $\frac{10}{3} \vee -\frac{167}{50}$ iv) $\frac{46}{25} \vee \frac{11}{6}$

33. د $a^2+b^2=0$ افادې څخه د a او b په هکله څه پوهېږی؟

34. د x او y دوو مثبتو عددو هندسي وسط د $g=\sqrt{xy}$ او حسابي وسط د $A=\frac{1}{2}(x+y)$ په واسطه تعریف شوی دی. ثبوت کړی چې $g< A$ دی، په هغه صورت کې چې $x\neq y$ وي.

35. که چېرې $2\leq a \leq 4$ او $4\leq b \leq 6$ وي، د $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ په هکله څه پوهېږی؟

دلاندینیو غیر مساواتو د حل سټ پیدا کړی:

36. $-4<x-5< +7$

37. $(x-1)(x+1)\leq (x+1)(x+2)$

38. $x^2 < 5x - 6$

39. $(\frac{x^2}{yz})^{-3}$

لاندې افادې پرته د منفي توان په شکل ولیکئ

40. $\frac{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}{a^3b^2c}$

41. $\frac{a^3b^2c}{a^{-1}b^{-2}c^{-3}}$

لاندې افادې ساده کړئ:

42. $\sqrt{4 \cdot 16 \cdot 36}$

43. $\frac{\sqrt{1.728 \cdot 10^6}}{\sqrt{\sqrt{12}-\sqrt{3}}}$

44. $2^{\frac{1}{6}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

45. $(0.0001)^{\frac{3}{2}}$

46. $(0.001)^{\frac{3}{2}}$

47. $\sqrt[5]{-0.00001}$

48. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

49. $(\frac{81}{625})^{\frac{-3}{4}}$

50. لاندې مطلقه قیمت په لاس راوړئ:

$$\left|1 - (\tfrac{1}{2})^{-2}\right|$$

51. که $|a - 10| < 2$ او $|b - 6| < 1$ وي. د لاندې افادو په مورد څه ویلی شئ.؟

i)	a-b	ii)	a+b
iii)	$a^2 + ab + 1$	iv)	$a^2 + b^2$

52. لاندې بیانونه د مطلقه قیمتونو په شکل و لیکی.

i) x د مبدا څخه تر 2- پورې قیمتونه اخیستلی شي.

ii) د x او 2 تر منځ فاصله د π څخه نده زیاته.

iii) هغه نقطې پیدا کړی چې د 3- او 7 څخه مساوي فاصلې ولري.

iv) هغه نقطې پیدا کړی چې د 1- نقطې څخه د 2 په اندازه فاصله ولري.

v) د x او 1- نقطې تر منځ فاصله د x او 1 نقطو تر منځ فاصلې د دوه چنده سره مساوي ده.

53. لاندې معادلې حل کړی.

(i $|x-2| = 2$

(ii $|x-1| = |3-x|$

(iii $|x+2| + |x-1| = 2$

(iv $|x+2| + |x-1| = 4$

54. څومره تام عددونه موجود دي چې د هغوی مطلقه قیمت د 5 څخه کوچنی وی.

55. د x هغه قیمتونه پیدا کړی چې د هغه په واسطه لاندې افادې صدق وکړي.

(I $|x-1| = |3-x|$ (ii $|x-2| = 5$

$(iii$ $|x| - |x-1| > 1$ $(iv$ $|x| - |x-1| < 2$

$(v$ $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| < 1$ (vi $\left|\frac{x-1}{x+1}\right| > 0$

56. د انټرولونو د پای نقطې درکړل شویدي د هغوی نیمائي نقطې پیدا کړی.

(i $30; 36$ (ii $-1; 8$ (iii $-7; -1$

57. لاندې انټرولونه په یو بل شکل باندې ولیکی:

$(a$ $|x-3| \leq 2$ (b -2<x<3

$(c$ $|x| < \sqrt{2}$ (d [-1,1]

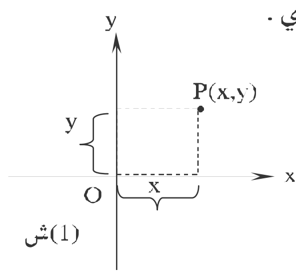
$(e$ $|x+2| < 1$ $(f$ (3,∞)

دوهم فصل

تحليلي هندسه

1. په مستوي کې د قايمو مختصاتو سيستم

دوه متقاطع د حقيقي عددونو محورونه چې يو ئې په افقي او بل ئې په عمودي ډول پروت دی په نظر کې نيسو. د تقاطع نقطه(O) ئې مبدا بولو ، چې د هغې ښی او پورته طرفونه د افقي او عمودي محورونود پاسه مثبت او د مبدا دکيڼې خوا او لاندې طرفونه د افقي او عمودي محورونو د پاسه منفي قبول شويدي. که چېرې P د مستوي يوه اختياري نقطه وي ، په دې صورت کې د Pنقطې څخه موازي خطونه د افقي او عمودي محورونو سره رسموو ، دا موازي خطونه افقي محور په x او عمودي محورپه y کې قطع کوي. له دې وجې دا دP نقطه د (x,y) حقيقي عددونو د يوې جوړې سره مطابقت کوي، چې دP نقطې د قائيمو مختصاتو په نوم ياديږي. دلته د (x,y) په مرتبه جوړه کې x ته د نقطې فاصله (distance)او y ته د نقطې ترتيب (ordinate) وايي، چې په دې صورت کې د حقيقي عددونو په هره جوړه پورې د مستوي يوه نقطه او د مستوي په هره نقطه پورې د حقيقي عددونو يوه مرتبه جوړه مطابقت کوي. د پورتنيو خواصو په درلودلو سره ،دا ډول محورونه د قائيمو مختصاتو سيستم په نوم ياديږي .



ش(1)

1.2 تعريف

د $(x_1 ، y_1)$او $(x_2 ، y_2)$ دوو نقطو ته منطبقې(يا مساوي) نقطې ويل کيږي ،که چېرې د هغوی له پاره $x_1 = x_2$ او$y_1 = y_2$صدق وکړي.

1. مثال

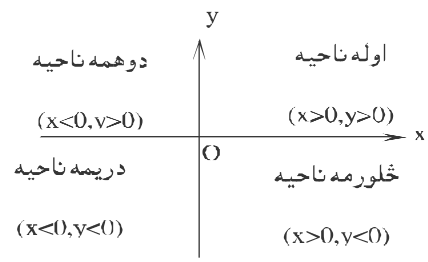
د xاوy عددونه داسې معلوم کړی چې په هغې سره د (x,-4)او(8,y+1) دوې نقطې سره منطبقې شي.

حل

$$(x,-4)=(8,y+1) \Rightarrow x = 8 \,;\, y + 1 = -4 \Rightarrow x = 8; y = -5$$

د مختصاتو ناحيې

د مختصاتو سيستم مستوي په څلورو نا حيو باندې ويشي، چې هره ناحيه د يوې قايمې زاويې په واسطه مشخصه کيږي او د ساعت ستنې د دوران په مخالف لوري، هره يوه په ترتيب سره په اوله،دوهمه،دريمه او څلورمه ناحيه سره يادوو. د نقطو د مختصاتو اشارې په دې څلوروناحيو کې په ترتيب سره(+,+) (-,+) ,(-,-) او (+,-) کيږي. (2)ش وګورئ.



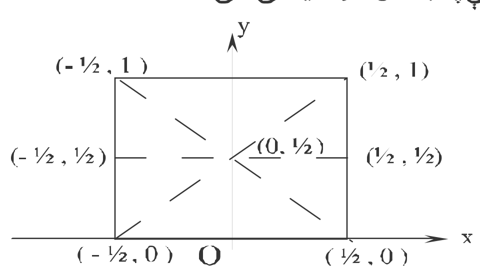
(2) ش

2. مثال

د يوې مربع يوه ضلع د x په محور پرته ده او د قطرونو د تقاطع نقطې مختصه ئې $(0,\frac{1}{2})$ ده . د مربع د راسونو مختصې معلومې کړئ.

حل

په (3) ش کې د راسونو مختصې په ښکاره ډول ليدلى شئ.



ش (3)

يادونه

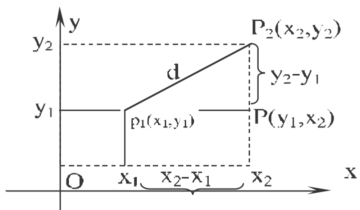
که يوه نقطه د x په محور پرته وي په هغې کې y=0 او که د y په محور پرته وي x=0 دی. يعنې د x په محور هره نقطه د (x,0) او د y په محور هره نقطه د (0,y) مختصې لري.

د دوو نقطو تر منځ فاصله

د $P_1\ (x_1 \,, y_1)$ او $P_2\ (x_2 \,, y_2)$ دوو نقطو تر منځ فاصله د قائیمو مختصاتو په سیستم کې $d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ کیږي .

ثبوت

که د P_1 او P_2 نقطو څخه د x او y په محورونو باندې عمودونه رسم کړو، د هغوی څخه یو قایم الزاویه مثلث په لاس راځي چې د P_1 او P_2 تر منځ فاصله د قایم الزاویه مثلث د وتر اوږدوالي کیږي.



ش (4)

د شکل له مخې د فیثاغورث دعوې په اساس لرو چې

$$\overline{P_1P_2}^2 = \overline{P_1P}^2 + \overline{PP_2}^2 \quad .$$

خرنګه چې $|P_1P| = x_2 - x_1$ او $|PP_2| = y_2 - y_1$ کیږي ، نو

$$d^2 = |\overline{P_1P_2}|^2 = (x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2$$

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2} \blacksquare$$ [13]

3. مثال

د $P_2(13,2)$ او $P_1(1,7)$ دوونقطو تر منځ فاصله پیدا کوو:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$=\sqrt{(1-13)^2+(7-2)^2}$$
$$=\sqrt{12^2+5^2}=\sqrt{144+25}$$
$$=\sqrt{169}=13.$$

4. مثال

که د ABC مثلث راسونه د A(-1,-4) ، B(2,-1) او C(-2,3) مختصې ولري ،نو

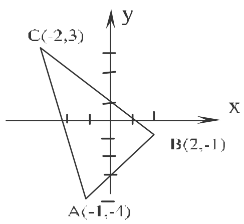
قایم الزاویه دی.

حل

$$\overline{AB}^2 = (-1-2)^2 + (-4+1)^2 = 9+9 = 18$$
$$\overline{AC}^2 = (-2+1)^2 + (3+4)^2 = 1+49 = 50$$
$$\overline{BC}^2 = (2+2)^2 + (-1-3)^2 = 16+16 = 32$$

$\Rightarrow \overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2.$

⇐ د ABC مثلث قایم الزاویه دی.



ش(5)

په یوه معلوم نسبت سره د یوه قطعه خط وېشل

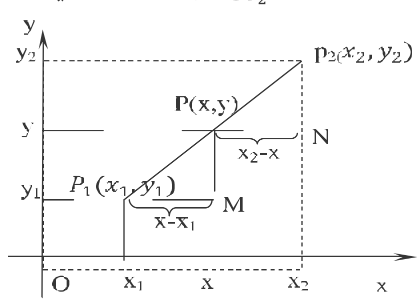
که P(x,y) د قطعه خط پر مخ د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطو تر منځ یوه نقطه وي ، نو $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ کیږي. که $\overline{P_1P}$ او $\overline{PP_2}$ د $\overline{P_1P_2}$ قطعه خط پر مخ هم جهت وي r مثبت او که نه r منفي دی. د (6) ش څخه د مثلثونو د تشابه له مخې لیکو چې:

$$\frac{\overline{P_1M}}{\overline{PN}} = \frac{P_1P}{PP_2} \Rightarrow \frac{x-x_1}{x_2-x} = r$$

$$\Rightarrow x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}\ ;\ r \neq -1$$

په همدې ترتیب د مثلثونو د تشابه څخه $y = \frac{y_1+ry_2}{1+r}$ په لاس راځي چې:

که د P نقطه د P_1P_2 قطعه خط نیمائي نقطه وي ،نو $\frac{P_1P}{PP_2} = r = 1$ کیږي او د نیمائي نقطې له پاره لیکو چې $x = \frac{x_1+x_2}{2}$، $y = \frac{y_1+y_2}{2}$.

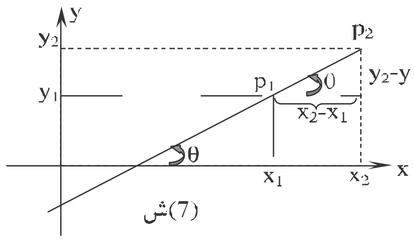


ش(6)

2. مستقیم خطونه او د هغوی معادلې

i) د مستقیم خط میل

هغه کوچنی زاویه(θ) چې د یوه مستقیم خط د دوران څخه د ساعت ستنې د دوران په خلاف جهت د x د محور سره جوړیږي ،د **انحراف**(**میل** زاویې) زاوئې په نوم یادیږي او د انحراف زاویې تانجنت ته د مستقیم خط **میل** ویل کیږي. هغه مستقیم خط چې د $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ دوو نقطو څخه تیریږي ، میل یې د $m = \tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ سره مساوي دی.



ش(7)

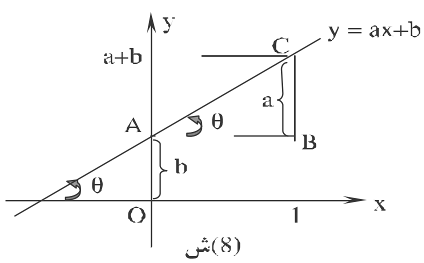
5. مثال یو مستقیم خط چې د $P_1(1,-1)$ او $P_2(4,2)$ دوو نقطو څخه تیریږي میل او د میل زاویه ئې پیدا کوو .

حل $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{2-(-1)}{4-1}=\frac{3}{3}=1$

دی ،نو هغه کوچنی زاویه چې دقطعه خط په واسطه د x محور د مثبت جهت سره جوړیږي 45^o ده.ځکه چې $m=\tan45^o=1$ کیږي.

ii) د مستقیم خط معادله

مستقیم خط دهغو نقطو (x ، y) ست دی چې دهغې په واسطه د y= ax+b دوه مجهوله معادله صدق کوي او y=ax+b ته د مسستقیم خط معادله ویل کیږي.
په پورتنی معادله کې د مستقیم خط میل a دی. یعنې پورتنی مستقیم خط د x محورد مثبت جهت سره د θ زاویه جوړوي او $\tan\theta = a$ کیږي چې په (8)ش کې یې په ښکاره لیدلی شی.یعنې . $\tan\theta = \frac{CB}{AB} \Rightarrow tan\theta = a$



ش(8)

iii) د مستقیم خط د معادلې پیدا کول په هغه صورت کې چې دوې نقطې ئې معلومې وي

یو مستقیم خط چې د (x_1,y_1) او (x_2,y_2)دوو نقطو څخه تیریږي په نظر کې نیسو. که (x,y) د دې مستقیم خط یوه بله نقطه او د میل زاویه ئې θ وي. نو لیکو چې:

$\tan\theta = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ V $\tan\theta = \frac{y-y_1}{x-x_1}$

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1).$$

6. مثال

د هغې مستقیم خط معادله پیدا کړی چې د (4,3)او (2-,1-) دوو نقطو څخه تیریږي.

حل

فرض کوو چې (2-,1-)=(x_1, y_1) او (4,3)=(x_2, y_2) دي. نو

$$\Rightarrow \frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x - x_1)$$

$$\Rightarrow y + 2 = \frac{5}{5}(x+1) \Rightarrow y + 2 = x + 1 \Rightarrow y=x-1.$$

iv) د یوه مستقیم خط معادله، چې میل او یوه نقطه ئې معلومه وي

یو مستقیم خط چې د (x_1, y_1)نقطې څخه تیریږي او میل ئې mوي د لاندې معادلې لرونکی دی.

$$m=\frac{y-y_1}{x-x_1}$$

$$\Rightarrow y - y_1 = m(x - x_1)$$

7. مثال

د یوه مستقیم خط معادله ولیکی چې د x محور سره (45^o) زاویه جوړوي او د(1,2) نقطې څخه تېرشي.

حل

پوهیږو چې:

$$m=\tan 45^o = 1$$

$$y-y_1 = m(x - x_1) \Rightarrow y-2=(x-1) \Rightarrow y=x+1.$$

8. مثال

یو مستقیم خط چې د x محور په(a ، 0) او د y محور په(b ، 0) کې قطع کوي راکړل شویدی معادله ئې پیدا کړی.

حل

پوهیږو چې $(x_1, y_1) = (a, 0)$ او $(x_2, y_2) = (0, b)$ د مستقیم خط دوې نقطې دي.نو د معادلې لاس ته راوړلو له پاره یې لرو چې:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\Rightarrow \frac{y-0}{x-\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{b}-0}{0-\mathrm{a}} \Rightarrow \frac{y}{x-\mathrm{a}}=-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$$
$$\Rightarrow y=-\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}(x-\mathrm{a}) \Rightarrow \mathrm{ay}+\mathrm{bx}=\mathrm{ab}$$
$$\Rightarrow \frac{x}{\mathrm{a}}+\frac{y}{\mathrm{b}}=1 \qquad \ldots \qquad (1)$$

9. مثال

د هغه خط معادله پیدا کړی چې د x محور په(2 ,0) او د y محور په(0,5) کې قطع کړی.

حل

ځرنګه چې a=2 او b=5 دی او د (1) رابطې له مخې لیکو چې:

$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}=1 \Rightarrow 5x+2y=10$$
$$\Rightarrow 5x+2y-10=0.$$

v) ددوومستقیمو خطونو تر منځ د زاوئې پیدا کول

فرضوو چې د Δ_1 او Δ_2 دوو مستقیمو خطونو میلونه په ترتیب سره m_1 ، m_2 دي . د دوی تر منځ زاویه $(\propto)$ د $tan \propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$ رابطې له مخې په لاس راځي .

ثبوت

که چېرې θ_1 او θ_2 د Δ_1 او Δ_2 مستقیمونو د میلان زاوئې وي ، نو د(9)ش له مخې لرو چې:

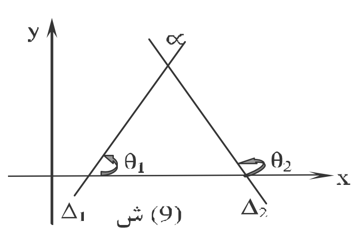
$$\propto=\theta_2-\theta_1 \quad \vee \quad \theta_2=\propto+\theta_1$$

$$\tan \propto=tan(\theta_2-\theta_1) \Rightarrow tan \propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1}$$

ځکه چې :

$$\tan\propto=\frac{sin(\theta_2-\theta_1)}{cos(\theta_2-\theta_1)}=\frac{tg\theta_2-tg\theta_1}{1+tg\theta_2 tg\theta_1}\ .$$

$$\Rightarrow tan \propto=\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} \qquad \ldots \qquad (2) \ \blacksquare$$



(9) ش

vi) د دوو خطونو د عمودیت او موازیتوب شرطونه

که چیرې دوه خطونه سره موازي وي، نو د دوی تر منځ زاویه $\propto = 0^o$ کیږي او (2)رابطې له مخې لیکو چې:

$$\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} = 0 \Rightarrow m_2 - m_1 = 0 \Rightarrow m_2 = m_1.$$

بنا پردې وایو چې که دوه خطونه سره موازي وي ،د هغوی میلونه سره مساوي دي. د عمودیت شرط له پاره فرض کوو چې خطونه سره عمود دي نود دوی تر منځ زاویه $\propto = 90^o$ کیږي. لرو چې:

$$\frac{m_2-m_1}{1+m_2m_1} = \infty \Rightarrow 1 + m_1 \cdot m_2 = 0 \Rightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$$

په نتیجه کې وایو چې که خطونه سره عمود وي ،د هغوی د میلونو د ضرب حاصل د 1- سره مساوي دی.

10. مثال

معلوم کړی چې په 2x+5y-7=0 او 15x-6y+4=0 معادلو پورې اړوند خطونه سره عمود دي.

حل

$$2x + 5y - 7 = 0 \Rightarrow 5y = -2x + 7 \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + \frac{7}{5} \qquad (i$$

$$\Rightarrow m_1 = -\frac{2}{5}.$$

$$15x - 6y + 4 = 0 \Rightarrow -6y = -15x - 4 \qquad (ii$$

$$\Rightarrow y = \frac{15}{6}x + \frac{4}{6} \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + \frac{2}{3} \Rightarrow m_2 = \frac{5}{2}$$

$$\xRightarrow{(i)(ii)} m_1 \cdot m_2 = -\frac{2}{5} \cdot \frac{5}{2} = -1 .$$

په نتیجه کې راکړل شوي خطونه سره عمود دي.

11. مثال

یو خط چې د $P_1(-4,3)$ او $P_2\ (2,-1)$ دوو نقطو څخه تیریږي ، د عمودي ناصف معاد له یې پیدا کړی.

حل

پوهیږو چې د P_1P_2 خط د نیمائي نقطې مختصې په لاندې ډول دي:

$$x = \frac{-4+2}{2} = -1 \ , \ y = \frac{3-1}{2} = 1.$$

یعنې (1,1-)د P_1P_2 خط د نیمائي نقطې مختصه ده.او د P_1P_2 خط میل د

$$m = \frac{-1-3}{2-(-4)} = -\frac{4}{6} = -\frac{2}{3}$$

څخه عبارت دی. نو هغه خط چې د (1,1-) نقطې څخه تیریږي او د P_1P_2 پر خط باندې عمود وي میل یې $m_2 = \frac{3}{2}$ دی.څرنګه چې (1,1-) د عمودي ناصف یوه نقطه او میل یې$m_2 = \frac{3}{2}$دی، نو معادله یې په لاندې ډول ده:

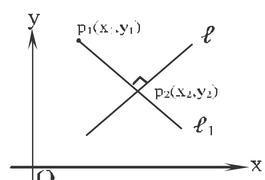
$$y-1 = \frac{3}{2}(x+1) \quad \Rightarrow y = \frac{3}{2}(x+1)+1$$
$$\Rightarrow y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$$

1.2 دعوی

د $P_1(x_1, y_1)$ نقطې او

$$\ell:\ Ax+By+C=0 \qquad \dots \qquad (3)$$

معادله پورې اړوند مستقیم خط، تر منځ فاصله د $d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ څخه عبارت ده.



ش(10)

ثبوت

فرض کو چې $P_2(x_2, y_2)$ د هغې عمود چې د P_1 نقطې څخه د ℓ په مستقیم رسمیږي د تقاطع نقطه ده. د P_1 نقطې فاصله ،د ℓ خط څخه د P_1P_2 قطعه خط اوږدوالی تعریف کوو. څرنګه چې د ℓ خط میل $-\frac{A}{B}$ دی ، نو د P_1P_2قطعه خط میل چې په ℓعمود دی $\frac{B}{A}$ کیږي. د ℓ_1 معادلې له پاره لیکو چې:

$$\ell_1:\ y-y_1 = \frac{B}{A}(x-x_1) \qquad (4)$$

څرنګه چې د P_2 نقطه په ℓ_1 پرته ده نو په (4) معادله کې صدق کوي. یعنې

$$y_2-y_1 = \frac{B}{A}(x_2-x_1)$$
$$\Rightarrow \frac{x_2-x_1}{A} = \frac{y_2-y_1}{B} = q$$

اوس که چیرې $x_2-x_1 = Aq$ او $y_2-y_1 = Bq$ په لاندې معادله کې وضع کوو:

$$d=|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

مومو چې

$$d=\sqrt{A^2q^2+B^2q^2}=\sqrt{A^2+B^2}\,|q| \qquad (5)$$

کیږي .څرنګه چې P_2 هم د ℓ نقطه ده، نو د P_2 نقطې مختصه په (3)معادله کې صدق کوي. یعنې

$$Ax_2+By_2+C=0$$
$$\Rightarrow Ax_2+By_2+C = A(x_1+Aq)+B(y_1+Bq)+C=0.$$

که پورتنی معادله د q له پاره حل کړو په لاس راځي چې:

$$q=-\frac{Ax_1+By_1+C}{A^2+B^2}$$
$$\Rightarrow |q| = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{A^2+B^2} \qquad (6)$$

اوس که د (6) معادلې څخه د $|q|$ قېمت په (5) کې وضع کړو لرو چې

$$d = \frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad . \quad \blacksquare \quad [21]$$

12. مثال

د (3,1) نقطې او 3x+4y-3=0 معادله پورې اړوند خط ، تر منځ فاصله پیدا کوو:

حل

څرنگه چې $(x_1, y_1)=(3,1)$;A=3 ;B=4او C= -3دی لرو چې:

$$d=\frac{|Ax_1+By_1+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\frac{|3\cdot 3+4\cdot 1-3|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$
$$=\frac{10}{\sqrt{25}}=\frac{10}{5}=2.$$

13. مثال

د ℓ_1 او ℓ_2 خطونو معادلې په لاندې ډول راکړل شوې دي.

$$\ell_1: x+2y-2=0$$
$$\ell_2: 2x+4y+3=0$$

معلوم کړی چې $\ell_1 \parallel \ell_2$ او د دوی ترمنځ فاصله پیدا کړی .

حل $m_{\ell_1}=-\frac{1}{2}$ او $m_{\ell_2}=-\frac{1}{2}$ دي. نو $\ell_1 \parallel \ell_2$.دا هم پوهیږو چې د ℓ_1او ℓ_2 تر منځ فاصله د ℓ_1د یوې نقطې او ℓ_2 تر منځ او یا د ℓ_2 خط د یوې نقطې او ℓ_1 تر منځ فاصله ده. څرنگه چې (0,1)د ℓ_1 خط یوه نقطه ده،نو د (0,1)نقطې او ℓ_2 تر منځ فاصلې په اړه لرو چې:

$$d=\frac{|2\cdot 0+4\cdot 1+3|}{\sqrt{2^2+4^2}}=\frac{7}{\sqrt{20}} \quad .$$

3. مخروطي مقاطع

مخروطي مقاطع(**Conic Sections**) د تحلیلي هندسې یوه اصلي او ډیر ه مهمه برخه ده ،چې په فزیک ،کمیا ، نظامي مسایلو ، په خاصه توگه په انجینري اوهمدارنگه نجوم کې دستورو د حرکت د مسیر (کیپلر قوانین)په مطالعه کې ډیر زیات د استعمال ځایونه لري . نو په دې اساس دلته ډېره پاملرنه ورته شویده او تطبیقي برخه یې د کتاب په وروستیو برخو کې لیدلی شي .

1.2 تعریف

که چیرې د **D** مستقیم خط د یوې معلومې دایرې دمرکز څخه عبور وکړي اودهغې په مربوطه مستوي باندې عمودوي ،دا سې چې د Δ دوهم مستقیم خط چې په راکړل شوې دایره باندې مماس دی د V په نقطه کې قطع کړي. پدې صورت کې دهغو نقطو هندسي محل چې د Δ ددوران څخه ددایرې په محیط حاصلیږي یوه مخروطي مقطع ده.D ته د مخروط محور، Δ ته دمخروط

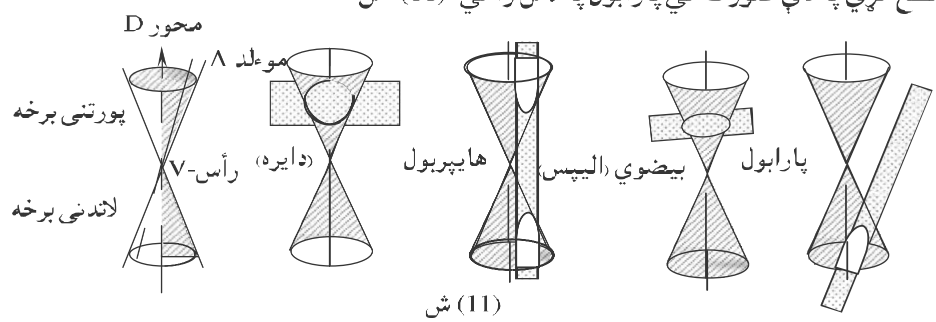
مؤلد او **V** ته د مخروط راس ویل کیږي.مخروطي مقطع د یوې مستوي د مختلفو وضعتیونو سره مختلفې منحني ګانې په لاس راکوي .

i) که قاطع مستوي ،د مخروط په محور باندي عمودوي ،په هغې پورې اړوند مقطع دايره ده.

ii) کـه مستوي، د مخـروط دمحورسـره مـوازي وي او دمخـروط دوه متنـاظر طرفونـه قطـع کړي په هغې پوري اړوند مقطع هايپرابول دی .

iii) کـه قـاطع مسـتوي ،د مخـروط محـور قطـع کـړي داسې چې پـه محـور بانـدې عمـود نـه وي په هغې صورت کې حاصل شوي منحني بيضوي (اليپس) دی.

iv) کـه قـاطع مسـتوي يـو لـه مؤلـد و سره مـوازي وي ، داسې چې د مخـروط يـوازې يـوه خـوا قطع کړي په دې صورت کې پارابول په لاس راځي .(11) ش.

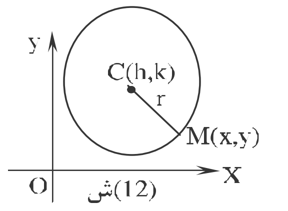


(11) ش

2.2 تعريف

دايره(**circle**) د مستوي د هغو نقطو هندسي محل دی، چې د يوې ثابتې نقطې څخه مساوي فاصلې ولري. ثابتې نقطې ته ددايرې مرکز او دهغې فاصله نظر ددايرې محيط ته ددايرې د شعاع ويل کيږي.

i) ددايرې معادلـه يوه دايره چې مرکز يې په (h,k) اوشعاع يې r وي،معادلـه يې د $(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$ څخه عبارت ده .(12)ش.



(12)ش

ثبوت

فرض کوو چې $M(x,y)$ ددايري د محيط يوه اختياري نقطه ده. داچې ددايرې دتعريف له مخې د CM فاصله هميشه ثابته او د r سره مساوي ده، نو لرو چې:

$$CM=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r$$

$$\Rightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2 \qquad \dots \qquad (7) \ ■$$

د مثال په توگه که يوه دايره چې د مرکز مختصه يې $C(h,k)=C(-2,3)$ اوشعاع يې $r=5$ وي ،معادله يې په لاندې ډول په لاس راورو .

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$
$$(x-(-2))^2+(y-3)^2=5^2$$
$$(x+2)^2+(y-3)^2=25.$$

د دايرې د معادلې عمومي حالت

پو هيږوچې ددايري معادله د

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

څخه عبارت ده اوله دې ځايه لرو چې:

$$x^2+y^2-2hx-2ky+(h^2+k^2-r^2)=0$$
$$\Rightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0$$
$$(a=-2h\ ;\ b=-2k\ ;\ c=h^2+k^2-r^2)$$

يا ليکو چې:

$$Ax^2+By^2+Dx+Ey+F=0\ ;\ A=B\neq 0$$

14. مثال

$x^2+y^2-4x+8y-5=0$ ددايرې معادله ده ، ددايرې شعاع او مرکز معلوم کړئ:

حل

$$x^2+y^2-4x+8y-5=0\ ;\ a=-2h=-4\ ,\ b=-2k=8.$$
$$\Rightarrow (x-2)^2-4+(y+4)^2-16-5=0$$
$$\Rightarrow (x-2)^2+(y+4)^2=25 \Rightarrow r=5\ ;(h,k)=(2,-4).$$

2.2 دعوی

د $x^2+y^2+ax+by+c=0$ معادله عبارت ده له:

a) کــه $a^2+b^2-4c>0$ وي، معادلــه يــوه حقيقــي دايــره راکــوي، چــې مرکــز ئــې $(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$ او شعاع ئې $r=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$ ده.

b) که $a^2 + b^2 - 4c = 0$ وي، معادله په نقطه پورې اړه لري .

c) که $a^2 + b^2 - 4c < 0$ وي، نو معادله یوه موهومي دایره راښیي .

ثبوت

د $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ څخه پوهیږو چې:

$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{a^2}{4} - \frac{b^2}{4} + c = 0$$
$$(x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 - \frac{a^2+b^2-4c}{4} = 0$$
$$\Rightarrow (x + \frac{a}{2})^2 + (y + \frac{b}{2})^2 = \frac{a^2+b^2-4c}{4}.$$

دوروستنی رابطې څخه معلومیږي چې:

a) که $a^2 + b^2 - 4c > 0$ وي ، نو راکړل شوي معادله د حقیقي دایرې معادله ده چې شعاع یې $r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c}$ او مرکز ئې $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$ دی.

b) که $a^2 + b^2 - 4c = 0$ وي ، په دې صورت کې $r = 0$ کیږي اومعادله په یوه نقطه پورې اړه لري.

c) د $a^2 + b^2 - 4c < 0$ په صورت کې معادله یوه موهومي دایره افاده کوي.[29] ■

15. مثال

د $4x^2 + 4y^2 - 8x + 24y + 4 = 0$ دایره مشخصه کړي.

حل

که د معادلې اطراف په 4 باندې وویشو، نو د $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$ معادله په لاس راځي ، چې $b=6, a=-2, c=1$ او $a^2 + b^2 - 4c > 0$ کیږي اومعادله په دایره پورې اړه لري لیکو چې:

$$h = -\frac{a}{2} = \frac{-(-2)}{2} = 1$$
$$k = \frac{-b}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$
$$\Rightarrow (h, k) = (1, -3)$$
$$r = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 - 4c} == \frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2 + 6^2 - 4} = \frac{1}{2}\sqrt{36} = 3.$$

16. مثال

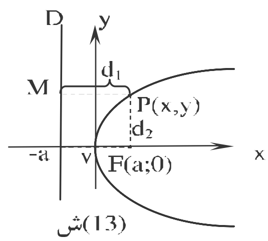
د $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 5 = 0$ په معادله کې $c=5$ او $b=-4, a=2$ دي.لرو چې: $a^2 + b^2 - 4c = 2^2 + (-4)^2 - 4 \cdot 5 = 0$. نو راکړل شوي معادله په یوه نقطه پورې اړه لري.

17. مثال

د $x^2+y^2-6x+4y+14=0$ په معادله کې a= -6, b=4, c=14 او $a^2+b^2-4c<0$ کیږي، نوراکړل شوي معادله یوه موهومي دایره رابنئي.

3.2 تعریف

پارابول (**Parabulla**) دمستوي دهغو نقطو هندسي محل دی.چې یوې ثابتې نقطې او یو مستقیم خط ته مساوي فاصلې ولري .
یا په بل عبارت پارابول دهغو نقطو هندسي محل دی ، چې دهغوی دفاصلو نسبت یو مستقیم خط اویوې ثابتې نقطې ته د $e=1$ عدد سره مساوي وي. دلته ثابته نقطه د پارابول محراق اومستقیم خط ته د پارابول هادي ویل کیږي:



(13)ش

i) د پارابول معادله

د x محور په نظر کې نیسو ، داسې چې د پارابول د محراق(F) څخه تیریږي او د پارابول په هادي (D) باندې عمود وي. د محراق او هادي تر منځ فاصلې د نیمائي څخه د y محور تېروو. که F(a,0) وي نو د هادي معادله یې x+a=0یعنې x=-a کیږي. دلته د مختصاتو مبدا د پارابول یوه نقطه ده چې د پارابول د راس په نوم یادیږي او هغه په V سره ښیو ، (13) ش . همدارنګه که P(x,y) د پارابول یوه اختیاري نقطه وي د پارابول د تعریف له مخې لرو چې:

$\frac{|PF|}{|PM|}=e=1 \Rightarrow |PF|=|PM|$.
څرنګه چې $|PF|=\sqrt{(x-\mathrm{a})^2+y^2}$ او PM=x+a کیږي. نو:

x+a= $\sqrt{(x-\mathrm{a})^2+y^2}$

$(x-\mathrm{a})^2+y^2=(x+\mathrm{a})^2$

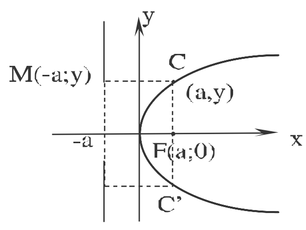
$x^2+y^2-2\mathrm{a}x+\mathrm{a}^2=x^2+2\mathrm{a}x+\mathrm{a}^2$

$y^2=4ax.$
دلته $y^2=4\mathrm{a}x$ د پارابول یوه معادله ده، چې د هغې منحني نظر د x محور ته متناظره ده

ii) د پارابول وتر

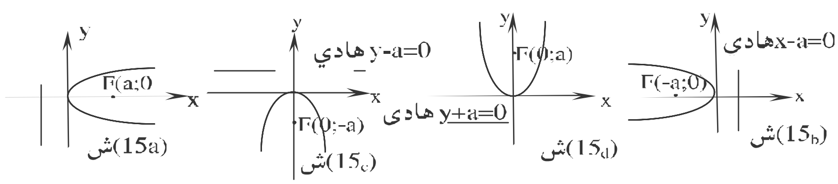
د CC' خط چې د پارابول په محراق باندې عمود او د پارابول دوې نقطې سره وصل کوي ،د پارابول د وتر په نوم یادیږي او اوږدوالی ئې 4a دی. (14) ش وګورئ. څکه چې

$$CM=CF=2a\ \ ;CC'=2CF=4a.$$



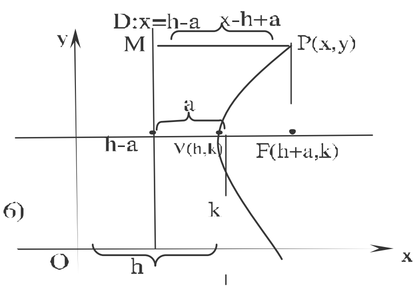
(14)ش

هغه پارابولاوې چې د هغوی ګرافونه د x یا y محور ته په متناظر حالت کې پراته وي د لاندې شکلونو لرونکي دي.



iii) د پارابول عمومي حالت

کـه د پـارابول راس V(h,k) او د تنـاظر محـور ئـې د x محـور سـره مـوازي وي پـه دې صـورت کـې F=(h+a,k) او هـادي یـې چـې د y محـور سـره مـوازي دی ،د x=h-a معادلـه لري. (16) ش.



(16)ش

که P(x,y) د پارابول یوه اختیاري نقطه وي د پارابول د تعریف له مخې د هغې د معادلې له پاره لیکو چې:

$|PM|=|PF|$

$|PF|=\sqrt{(x-h-a)^2+(y-k)^2}$

$|PM|=x-h+a$

$\Rightarrow (x-h-a)^2+(y-k)^2=(x-h+a)^2$

$(x-h)^2-2a(x-h)+a^2+(y-k)^2=(x-h)^2+2a(x-h)+a^2$

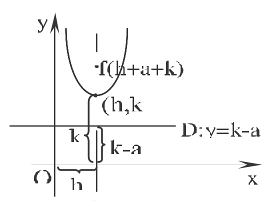
$\Rightarrow (y-k)^2=4a(x-h).$

په عمومي ډول سره د پارابول معادلې د لاندې شکلونو څخه د یوه شکل لرونکي دي:

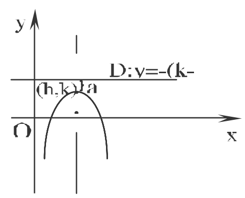
$(y-k)^2=\pm 4a(x-h)\ ;\ D: x=\pm(h-a)$

$(x-h)^2=\pm 4a(y-k)\ ;\ D: y=\pm(k-a)$

چې په ترتیب سره د $y=Ax^2+Bx+C$ او $x=Ay^2+By+C$ سره معادل او د ځینو ګرافونه په
لاندې ډول دي.



ش(17)



ش(18)

18 مثال

یو پارابول چې محراق ئې (6,-2) او د هادي معادله ئې x-2=0 ده ، راکړل شوي ده.
معادله ئې پیدا کړی.

حل پوهیږو چې:

$F(h+a,k)=(6,-2) \Rightarrow x=h-a=2\ ;\ k=-2$

$\Rightarrow h+a=6\ ;\ h-a=2\ \Rightarrow h=4$

$\Rightarrow h-a=2 \Rightarrow a=2$

$\Rightarrow (y-k)^2=4a(x-h)$

$\Rightarrow (y-(-2))^2=4\cdot 2(x-4)$

$(y+2)^2=8(x-4)$

$\Rightarrow y^2+4y-8x+36=0.$

19. مثال

یــو پــارابول چــې راس ئــې $(h,k)=(3,2)$ ، د تنــاظر محــور ئــې د y محــور ســره مــوازي او منحني ئې د $(4,5)$ نقطې څخه تیریږي راکړل شوي ده، معادله ئې پیدا کړی.

حل

دا چــې د پــارابول د تنــاظر محــور د y ســره مــوازي دی، عمــومي معادلــه ئــې پــه لانــدې ډول ده.

$$(x-h)^2 = 4a(y-k)$$

همدارنګه لرو چې:

$$(h,k)=(3,2) \Rightarrow h=3; k=2.$$

نو لیکو چې:

$$(x-3)^2 = 4a(y-2).$$

څرنګه چې د $(4,5)$ نقطه د پارابول یوه نقطه ده ، نو د پارابول معادله په کې صدق کوي. یعنې:

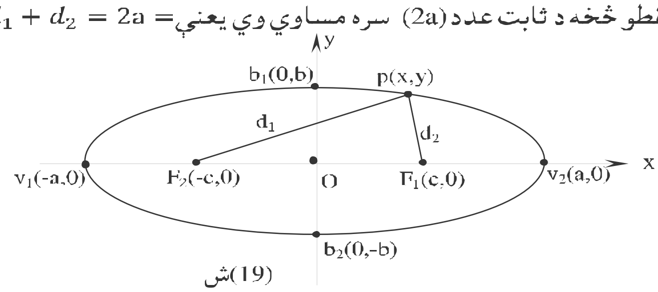
$$(4-3)^2 = 4a(5-2) \Rightarrow a=\frac{1}{12}.$$

او د پارابول معادله په لاندې ډول ده.

$$(x-3)^2 = 4a(y-2)\ ;\ a=\frac{1}{12}$$
$$\Rightarrow (x-3)^2 = 4\cdot\frac{1}{12}(y-2)$$
$$(x-3)^2 = \frac{1}{3}y-\frac{2}{3}\ .$$
$$3x^2-18x-y+29=0.$$

4.2 تعریف

بیضوي **(Ellipse)** د مستوي د هغو نقطو هندسي محل دی ،چې د هغوی د فاصلو مجموعه د F_1 او F_2 دوو ثابتو نقطو څخه د ثابت عدد $(2a)$ سره مساوي وي یعنې $d_1+d_2=2a=Constant$.



(19)ش

i) د بیضوي معادله

د $F_1(c,0)$ او $F_2(-c,0)$ نقطې چې د بیضوي د محراقونو په نوم یادېږي او $P(x,y)$ د بیضوي یوه اختیاري نقطه په نظر کې نیسو .د بیضوي د تعریف له مخې د a ثابت عدد $(a>0)$ له پاره لرو چې:

$$|PF_2| + |PF_1| = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a.$$

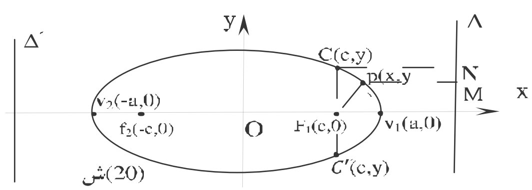
د یو لړ عملیو وروسته په لاس راځي چې:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow cx - a^2 = -a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$a^2 - c^2 := b^2$$
$$\Rightarrow b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

دلتــه د بیضــوي د اوږده قطــر اوږدوالــی پــه 2a . د لنــډ قطــر اوږدوالــی پــه 2b او د محراقونــو F_1 او F_2 تر منځ فاصله په $2c$ سره ښیو او $a^2 = b^2 + c^2$ کیږي.

ii) د بیضوي عن المرکزیت

د $e := \frac{c}{a} < 1$ عدد د بیضوي د عن المرکزیت(eccentrity) پــه نوم یادیږي او د هغې له پاره د $|PF_1| = e|PM|$ رابطه تل صدق کوي. د Δ او Δ′ خطونه هر یو د بیضوي د هادي په نوم یادیږي، چې معادلې ئې په ترتیب سره $x - \frac{a}{e} = 0$ او $x + \frac{a}{e} = 0$ کیږي، او په لاندې ډول په لاس راځي.



مــوږ د Δ معادلــه پــه لاس راوړو او د Δ′ معادلــه هــم د هغــې پــه شــان پــه لاس راځــي. د Δ د معادلې د پیدا کولو له پاره د (20)شکل له مخې لیکو چې:

$$x = OV_1 + V_1M \;\; ; x = OV_1 + \frac{|F_1V_1|}{e} = OV_1 + \frac{a-c}{e}$$

$$= a + \frac{a-c}{\frac{c}{a}} = a + \frac{a^2-ac}{c} = \frac{ac+a^2-ac}{c}$$
$$= \frac{a^2}{c} = \frac{a}{\frac{c}{a}} = \frac{a}{e} \Rightarrow x = \frac{a}{e} \;\; \text{یا} \;\; x - \frac{a}{e} = 0$$

که د بیضوي (الیپس)مرکز په (h,k) کې وي د پورته په شان د هادي معادله $x=h+\frac{a}{e}$ په لاس راځي. همدارنګه د Δ′ له پاره هم د $x=h-\frac{a}{e}$ معادله حاصلیږي . بیاکه چېرې د بیضوي محراقونه د y په محور او مرکز ئې په (h,k) کې پروت وي ، نو د هادي معادلې یې د $y=h\pm\frac{a}{e}$ کیږي.

iii) د بیضوي معیاري وسعت

د `CC` قطعه خط اوږدوالی چې د بیضوي د محراق څخه عموداً تیریږي، د بیضوي معیاري وسعت تعریف شوی دی. یعنې V_2V_1 ⊥ CC' او $|CC'|=\frac{2b^2}{a}$ دی او د (20) ش له مخې د معیاري وسعت اوږدوالی په لاندې ډول په لاس راځي.

$$|CF_1| = \sqrt{(c-c)^2+(y-0)^2} = e\ (CN)$$

$$= e\left(a-c+\frac{a-c}{e}\right) = \frac{c}{a}\left(a-c+\frac{a-c}{\frac{c}{a}}\right)$$

$$= \frac{c}{a}\left(a-c+\frac{a^2-ac}{c}\right)$$

$$= \frac{c}{a}\left(\frac{ac-c^2+a^2-ac}{c}\right)$$

$$= \frac{a^2-c^2}{a} = \frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow |CC'| = 2|CF_1| = \frac{2b^2}{a}\ .$$

په عمومي ډول سره یوه بیضوي چې مرکزیې (h,k) او د تناظر محورونه د y او یا x محور سره موازي وي .په ترتیب سره د لاندې معادلو لرونکې ده.

$$\frac{(x-h)^2}{b^2}+\frac{(y-k)^2}{a^2}=1$$ (د تناظر محور ئې د y محور سره موازي دی)

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$ (د تناظر محور ئې د x محور سره موازي دی .)

20. مثال

د یو الیپس محراقونه $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$ او راسونه ئې $V_1(5,0)$ ، $V_2(-5,0)$ دي. معادله ئې په لاندې ډول ده:

حل

د مثال څخه پوهیږو چې:

$$a=5\ ;\ c=3 \Rightarrow b^2 = a^2-c^2$$

$$b^2 = 25-9 = 16 \Rightarrow b = 4$$

دا چې محراقونه د x په محور پراته دي، نو د تناظر محور ئې په خپله د x محور دی . لرو چې:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

21. مثال

د مستوي د هغو نقطو هندسي محل پیدا کړی چې د (0,5) او (0,-5)دوو ثابتو نقطو ته ئې د فاصلو مجموعه د اوږدوالي 20 واحده وي.

حل

$2a=20 \Rightarrow a = 10 \; ; c = 5$

$\Rightarrow b^2 = a^2 - c^2 \Rightarrow b^2 = 100 - 25 = 75 \Rightarrow b= 5\sqrt{3}$

څرنګه چې د بیضوي محراقونه د y په محور پراته دي، لیکو چې:

$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$

$\frac{x^2}{75} + \frac{y^2}{100} = 1$

22. مثال

د $16x^2 + 25y^2 - 64x + 50y - 311 = 0$ په معادله پورې اړوند منحني مشخصه کړی:

حل

$16(x^2 - 4x) + 25(y^2 + 2y) = 311$

$16\,[(x-2)^2 - 4] + 25\,[(y+1)^2 - 1] = 311$

$16\,(x-2)^2 - 64 + 25(y+1)^2 - 25 = 311$

$16\,(x-2)^2 + 25(y+1)^2 = 400$

$\frac{16(x-2)^2}{400} + \frac{25(y+1)^2}{400} = 1$

$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+1)^2}{16} = 1.$

د اخیرنی معادلې څخه معلومیږي، چې په معادله پورې اړوند منحني داسې بیضوي ده . چې د تناظر محور ئې د x محور سره موازي ، a=5، b=4 ، د محراقونو تر منځ فاصله ئې6 او مرکز ئې په (h,k)=(2,-1) کې پروت دی. ځکه چې:

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 16$

$c^2 = 9 \Rightarrow c = 3 \Rightarrow 2c = 6.$

او د محراقونو مختصې ئې په لاندې ډول دي:

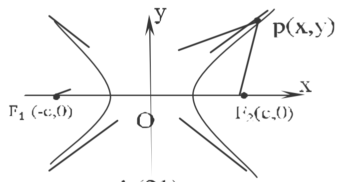
$F_1(h+c, k) = F_1(2+3, -1) = F_1(5, -1)$

$F_2(h-c, k) = F_2(2-3, -1) = F_2(-1, -1).$

5.2 تعریف

د F_1 او F_2دوې نقطې او د k>0 عدد په نظر کې نیسو ، داسې چې د F_1 او F_2 دوو نقطو تر منځ فاصلې څخه د k عدد کوچنی($d(F_1F_2) > k$) وي. نو هایپربول (Hyperbola) د هغو نقطو(P) هندسي محل دی چې د هغې له پاره لاندې رابطه صدق وکړي .

$|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = k$



ش (21)

دلته F_1 او F_2 د هایپربول د محراقونو په نوم یادیږي.په دې ځای کې هایپربول په ستندرډ حالت کې پروت دی، یعنې محراقونه ئې د x په محور پراته او د وضعیه کیمیتونو د مبدا څخه مساوي فاصلې لري. اوس غواړو چې د هایپربول معادله په لاس راوړو. ددې مقصد له پاره k=2a یا $a=\frac{k}{2}$ وضع کووا و د P(x,y) اختیاري نقطې له پاره د تعریف له مخې لرو چې:

$$|d(P,F_1)-d(P,F_2)|=2a$$

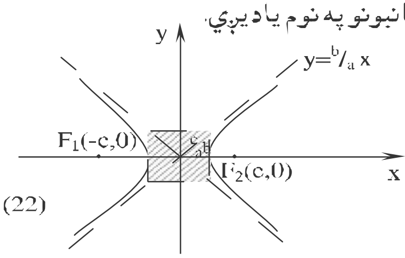
څرنګه چې $F_1(-c,0)$ او $F_2(c,0)$ دي ،نو:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$
$$(x+c)^2+y^2=4a^2\pm 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2$$
$$\Rightarrow xc-a^2=\pm a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$
$$\Rightarrow x^2c^2-2a^2xc+a^4=a^2(x^2-2cx+c^2+y^2)$$
$$\Rightarrow (c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2)$$
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1.$$

دلته $b^2:=c^2-a^2$ وضع کوو لرو چې:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\ .$$

دا چې د هایپربول قېمتونه تل د $y=\frac{b}{a}x$ او $y=-\frac{b}{a}x$ خطونو تر منځ پاته کیږي ، له دې وجې د $y=\frac{b}{a}x$ او د $y=-\frac{b}{a}x$ خطونه د هایپربول د مجانبونو په نوم یادیږي.



ش (22)

د $y=\frac{b}{a}x$ او $y=-\frac{b}{a}x$ مجانبونو معادلې، د $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ معادلې د حل کولو څخه په لاس راځي . یعنې

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0\Rightarrow y=\pm\frac{b}{a}x\ .$$

دا ځکه چې کله $x \to \pm\infty$ ته نږدې کیږي ، د $y=\pm\frac{b}{a}x$ او هایپربول تر منځ عمودي فاصله صفر کیږي. یعنې د هایپربول قیمت په هغه صورت کې چې $x\to\pm\infty$ شي په خپله $y=\pm\frac{b}{a}x$ انتخاب کولی شو. چې دا موضوع په لاندې ډول لیدلی شو :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$
$$\Rightarrow y=\pm\sqrt{\frac{b^2}{a^2}x^2-b^2}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\quad .$$

دا چې پورتنی رابطه د هایپربول د معادلې یو بل شکل دی، د (هایپربول) او د هایپربول د مجانب تر منځ فاصله د صفر په لور نږدې کیږي کوم وخت چې x د بې نهایت په لور تقارب وکړي. دا مطلب په ریاضیکي توګه په لاندې ډول دی :

$$\Rightarrow \left|\frac{b}{a}|x|-\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right|=\frac{b}{a}\left||x|-\sqrt{x^2-a^2}\right|$$

او کله چې $x\to\infty$ وکړي لرو چې:

$$\frac{b}{a}\left||x|-\sqrt{x^2-a^2}\right|=\frac{b}{a}\left||x|-\sqrt{x^2-a^2}\right|\frac{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$=\frac{b}{a}\cdot\frac{x^2-(x^2-a^2)}{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}=\frac{b}{a}\cdot\frac{a^2}{|x|+\sqrt{x^2-a^2}}\to 0.\quad [32]$$

هغه خط چې د محراقونو څخه تېر او هایپربول په دوو نقطو کې قطع کړي، دا د تقاطع نقطې د هایپربول د راسونو په نوم یادیږي.

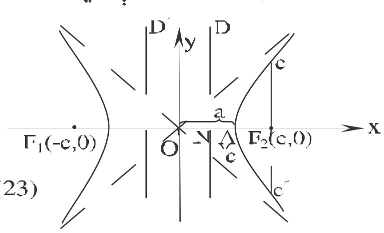
i) د هایپربول د هادي معادلې

د هغې هایپربول د هادي معادلې چې محراقونه ئې د x په محور پراته او د راسونو مختصې ئې (a,0) او (-a,0) دي د $x=\pm\frac{a}{e}$ څخه عبارت دي. د (23)ش له مخې د هادي (D) له پاره لرو چې :

$$x=ON=a-NA=a-\frac{c-a}{e}\ ;\ (\ c=\frac{FA}{NA}\ ;NA=\frac{FA}{e}=\frac{c-a}{e}\ )$$

$$=a-\frac{c-a}{\frac{c}{a}}=a-\frac{ac-a^2}{c}=\frac{ac-ac+a^2}{c}=a\cdot\frac{a}{c}=\frac{a}{\frac{c}{a}}$$
$$\Rightarrow x=\frac{a}{e}.\quad [15]$$

په عمومي ډول سره که د هایپربول راسونه په (h,k) کې وي ، د هادي معادلې یې $x=h-\frac{a}{e}$ او $x=h+\frac{a}{e}$ کیږي.



ش (23)

همدارنګه که د هایپربول د تناظر محور د y په محور پروت وي ،د مجانبونو معادلې ئې $x=\pm\frac{a}{b}y$ کیږي . د وتر، چې د محراق څخه تېر او د هایپربول په اصلي محور عمود دی ،اوږدوالی یې د $|CC'|=\frac{2b^2}{a}$ سره مساوي دی چې د هایپربول وسعت هم ورته ویل کیږي.

ii) دهایپربول عمومي حالت

که چېرې د هایپربول مرکز د (h,k)په نقطه کې وي، معادلې ئې په لاندې ډول دي.

اصلي محور ئې د x محور سره موازي دی : $\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1.$

اصلي محور ئې د y محور سره موازي دی: $\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1.$

د مجانبونومعادلې ئې په ترتیب سره:

$$y-k=\pm\frac{b}{a}(x-h)$$
$$x-h=\pm\frac{a}{b}(y-k).$$

کیږي .

23. مثال

په $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ معادله پورې اړوند منحني مشخصه کړی .

حل

د راکړل شوي معادلې څخه لرو چې:

$$a^2=16\Rightarrow a=4$$
$$b^2=9\Rightarrow b=3$$
$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{16+9}=\sqrt{25}=5$$

د مرکز مختصه ئې $(h,k)=(0,0)$ ،د محراقونو مختصې ئې $(-5,0)$ ،$(5,0)$ ،د مجانبونو معادلې ئې $y=\pm\frac{3}{4}x$ او د هادي معادلې ئې $x=\pm\frac{a}{c}=\frac{a}{\frac{c}{a}}=\frac{a^2}{c}=\frac{16}{5}\Rightarrow x=\pm\frac{16}{5}$ دي .

24. مثال

د یو هایپربول معادله پیدا کړی کوم چې د محراقونو مختصې یې $F_1(8,17)$ ، $F_2(8,-9)$ او راسونو مختصې یې (8,9) او (8,-1) راکړل شوي دي.

حل

$$|F_1F_2|=2c\Rightarrow c=\frac{F_1F_2}{2}$$
$$c=\frac{\sqrt{(8-8)^2+(17+9)^2}}{2}=\frac{26}{2}=13.$$

لرو چې:

$a = 5$ او $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12.$

همدارنګه :

$$\Rightarrow h = 8; k + a = 9 \Rightarrow k = 9 - a = 9 - 5 = 4.$$
$$\Rightarrow \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$
$$\Rightarrow \frac{(y-4)^2}{25} - \frac{(x-8)^2}{144} = 1$$

25. مثال

پــه $4y^2 - 9x^2 - 36x - 8y - 68 = 0$ هــایپربول پــورې اړونــد د مرکز، محراقونــو او راسونو مختصې همدارنګه د مجانبونو معادلې په لاس راوړی :
(د تمرین په ډول)

4.تمرین

1. لاندې نقطې د یو کاغذ پر مخ رسم کړی .
$A(2,0)$; $B(0,3)$; $C(-20)$; $D(-2,2)$; $E(0,-1)$; $F(2,2)$

او بیائې سره وصل کړی وګوری چې کوم شکل منځ ته راځي.

2. فرض کوو چې په پورتنی مسئله پورې اړوند شکل یو واحد ښی خواته او دوه واحده پورته خواته بې ځایه شویدی. په دې صورت کې F', E', D', C', B', A' نوي نقطې چې لاس ته راځي مختصات ئې پیدا کړی

3. (2,2);(-2,0)او (2,-1) نقطو څخه کومه یوه نقطه په څلورمه ناحیه کې پرته ده.

4. وښــیی چــې کــه $P_1(x_1, y_1)$ او $P_2(x_2, y_2)$ نقطــې پــه افقــي خــط پانــدې پرتــې وي نــو $|P_1P_2| = x_1 - x_2$ او که په عمودي خط باندې پرتې وي نو $|P_1P_2| = y_1 - y_2$ کیږي.

5. د لاندینیو نقطو تر منځ فاصله پیدا کړی:

(i $(6,2)$; $(4,2)$ (ii $(1,3)$; $(5,7)$

(iii $(1,-1)$; $(-1,1)$ (iv $(-2,-3)$; $(1,1)$

6. یو مثلث د خپلو دریو راسونو د مختصو په اساس راکړل شویدی .وښیی چې کوم یو ئې قایم الزاویه دی.

(i $(7,-4)$; $(5,3)$; $(7,1)$ (ii $(2,3)$; $(-3,3)$; $(1,1)$

(iii $(\frac{3}{2},\frac{1}{2})$; $(4,2)$; $(-1,2)$ (iv $(3,1)$; $(2,0)$; $(0,1)$

7. د یوه **قطعه خط** د انجامونو مختصې راکړل شوي دي. د **نیمائي نقطو مختصې** ئې پیدا کړی:

(a $(3,2)$; $(-4,3)$ (b $(100,-50)$; $(100,50)$ (c $(-1,3)$; $(11,5)$

8. د $A(4,0)$، $B(3,4)$، $C(-1,3)$ ، او $D(0,-1)$ نقطې په مستوي کې د کاغذ پر مخ تعین کړی. ایا **هغه شکل** چې د پورتنیو نقطو د وصل کیدو څخه په لاس راځي مربع دی؟ او که مربع وي د هغې د ضلع اوږدوالی او هم په پورتنۍ مساله پورې داړوند شکل د ضلعو د نیمائي نقطومختصې پیدا کړی.

9. د هغو خطونو **میل** پیدا کړی چې د راکړل شویو دوو نقطو څخه تیریږي.

(a $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{6}\right)$; $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (b $(2,-3)$; $(4,2)$

(c $(3,8)$; $(4,-6)$ (d $(3,-5)$; $(-3,-2)$

10. د خط دوې نقطې درکړل شوي دي ، د هغې د **میل زاویه** پیدا کړی:

(a $(2,3)$; $(2,5)$ (b $(2,-3)$; $(4,6)$

(c $(0,-1)$; $(-\sqrt{3},0)$ (d $(2,-4)$; $(4,-6)$

11. د یوه **خط میل** او د هغې د **تقاطع نقطه** د y محور سره درکړل شویده **معادله** ئې پیدا کړی.

(i $m=3$; $b=0$ (ii $m=\frac{1}{2}$; $b=1$

(iii $m=0$; $b=-2$ (iv $m=-\frac{1}{2}$; $b=1$

(v $m=-7$; $b=-3$

12. که د یوه خط د تقاطع نقطه د x محور سره a او د y محور سره b وي، معلوم کړی چې: $a=b=0$ دی، یا a او b دواړه د صفر خلاف دي.

13. د لاندینیو معادلو څخه د **خط میل** (m) همدارنګه دخط تقاطع نقطې د x او y محورونو سره پیدا کړی.

(i $5x+2y+2=0$ (ii $5x-y=3$

(iii $3x+2y=0$ (iv $2x+3y-5=0$

14. د خط د **تقاطع نقطې** (a او b) په ترتیب سره د x او y محورونو سره درکړل شویدي **معادله** ئې پیدا کړی.

a=1 ; b=2 (ii a=4 ; b=1/2 (i

a= -1/3 ; b=1 (iv a=1/4 ; b = ½ (iii

15. د یوخط د میل زاویه در کړل شویده ،د خط د تقاطع نقطو رابطه د x او y محورونو سره څه ډول ده.؟

90^o (d 45^o (c 60^o (b 135^o (a

16. د دايرې مرکز او شعاع راکړل شوي دي، معادله ئې په لاس راوړی.

C(0,0) ; r=5 (iii C(3,2) ; r=4 (ii C(2,-2) ;r=2 (i

17. د دايرې مرکز او شعاع په لاس راوړی :

$(x-1)^2+(y+6)^2=36$ (ii $(x+3)^2+y^2=9$ (i

$(x+4)^2+(y-2)^2=16$ (iv $(x-a)^2+(y-b)^2=c^2$ (iii

18. لاندې د دايرې معادلې په معياري شکل بدلې کړی :

$x^2+y^2-6x-2y-6=0$ (i

$x^2+y^2+4x-5y-7=0$ (ii

$4x^2+4y^2+24x-4y-6=0$ (iii

$3x^2+3y^2-4x+2y+6=0$ (iv

19. د لاندينيو دايرو، حقيقي ، موهومي او صفري نوعيت تشخيص کړی :

$x^2+y^2-6x-2y-6=0$ (i

$x^2+y^2+4x-5y-7=0$ (ii

$4x^2+4y^2+24x-4y+1=0$ (iii

$3x^2+3y^2-4x+2y+6=0$ (iv

20. د هغو خطونو ميل پيدا کړی چې د راکړل شويو دوو نقطو څخه تيريږي.

(2,-3) ; (4,2) (b $(\frac{1}{3},\frac{1}{6})$; $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (a

(3,-5) ; (-3,-2) (d (3,8) ; (4,-6) (c

21. د يوه خط ميل او يوه نقطه درکړل شوي ده معادله ئې پيدا کړی:

m= -1 ; P(2,-1) (ii m=-2 ; P((-1,-2) (i

m=2 ; P(1,2) (iv m =1 ; $P(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$ (iii

22. د پارابول د محراق او هادي معادلې درکړل شوي دي. معادله ئې پيدا کړی.

F(6,-2) ; x-2 =0 (iii F(1,3) ; x+2 =0 (ii F(3,1) ; y= 0 (i

23. د بيضوي معادلو څخه راسونه په لاس راوړی

(i $9x^2 + 16y^2 = 576$

(ii $16(x-6)^2 + 36(y-4)^2 = 576$

(iii $9x^2 + 4y^2 + 96x - 84 - 11 = 0$

(iv $16x^2 + 4y^2 + 96x - 84 - 84 = 0$

24. په بيضوي پورې اړوند مشخصات درکړل شوي دي ، معادلې يې پيدا کړی .

(i $F_2(0,0)$; $F_1(0,-5)$; $V_1(0,13)$; $V_2(0,-17.5)$

(ii $F_1(+4,0)$; $F_2(-4,0)$; $V_1(5,0)$; $V_2(-5,0)$

(iii $F_1(+4,0)$; $F_1(-4,0)$; $e = \frac{5}{8}$

25. د هغې بيضوي معادله وليکی چې مرکز ئې په (1,2) ، محراقونه ئې په (6,2) او (-4,2) کې پراته دي.

26. د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ منحني رسم کړی په هغه صورت کې چې a=b وي.

27. د هايپربول معادلو څخه محراقونه، راسونه او مجانبونه په لاس راوړی.

(i $x^2 - y^2 = 25$

(ii $4x^2 - 25y^2 = 100$

(iii $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

28. د لاندې هايپربول، محراقونه، راسونه او مجانبونه په لاس راوړی :

(i $\frac{(x-1)^2}{9} - \frac{(y-2)^2}{16} = 1$

(ii $\frac{(y+1)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$

(iii $x^2 - 3y^2 - 4x + 18y - 550 = 0$

دريم فصل

تابع

1. د تابع مفهوم

په رياضياتو کې، د يو په زړه پورې مسايلو څخه د توابعو(functions) مطالعه ده ، چې د ژوند په ټولو ساحو کې د هغې سره زيات مخامخ کيږو او په عمومي توګه سره ويلی شو چې د علومو ژوره مطالعه او د هغې پرمختګ بې له توابعو څخه صورت نه شي موندلی. د بېلګې په توګه د انجنيري او د تخنيک مطالعه هم د توابعو په تيوري ولاړه ده . بنا پردې ښايي چې ښه پاملرنه ورته وشي.

تابع په حقيقت کې هغه وخت ظهور کوي چې د يو کيميت تحول د بل کيميت په تحول پورې اړه ولري . که چېري يو له متحولينو څخه يعنې مستقل متحول ته يو قېمت ور کړل شي په دې صورت کې د متحولينو څخه دوهم متحول چې د تابع په نوم يادېږي ، يو معلوم قېمت ځانته غوره کوي او د دې مفهوم د څرګندوالي په خاطر لاندې څو مثالونه په نظر کې نيسو .

1. مثال

د ازاد سقوط په حالت کې يوې نقطوي کتلې د طی شوي فاصلې (S)او د وخت (t) تر منځ د $S=\frac{1}{2}gt^2$ رابطه موجوده ده . دلته $g=9.81m/sec^2$ د ځمکې جاذبې قوې د تعجيل قېمت دی او له دې ځاي څخه دS قېمت دt په وخت کې پيدا کيږي. نو S د t تابع ده او داسې ئې ليکو: $S=S(t)$.دلته په عمل کې اکثراً دا ښکاره ده، چې کوم يو د مستقل متحول او کوم يو د تابع په څېر انتخاب کړو.

2. مثال

د يوې مربع مساحت (A)د هغې د ضلع د اوږدوالي تابع دی. که s د مربع د ضلع اوږدوالی وي ، د هغې مساحت د $A=s^2$ په واسطه معلوميږي. دلته s يو مستقل متحول او A د s يوه تابع ده.

3. مثال

ايا د يو مستطيل مساحت ،د هغې د محيط تابع دی ؟

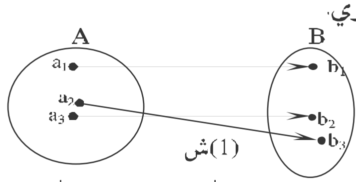
ځواب : نه.

د مثال په توګه يو مستطيل چې اوږدوالی ئې 12 واحده او پلن والی يې 6 واحده دی، محيط ئې 36 واحده کيږي . يوه مربع چې ضلع ئې 9 واحده ده هم 36 واحده محيط لري او مساحتونه يې په

ترتیب سره 72 او 81 واحده د سطح کیږي. یعنې د محیط په ټاکلي قیمت سره یوازې او یوازې د مساحت یو ټاکلی قیمت په لاس نه راځي.

1.3 تعریف

د A او B دوو سټونو له پاره ، یوه تابع د A څخه B ته یوه رابطه ده ،چې د Aسټ د هر عنصر سره د B سټ یوازې او یوازې یو عنصر ته اړیکه ورکوي.



(1)ش

د A سټ ته د تابع د تعریف نا حیه(Domain) او د B سټ ته د تابع د قیمتونو ناحیه (Codomain) وائي. د B سټ دb یو عنصر، چې د A سټ دa یوه عنصر سره اړیکه لري ، د a عنصر د تصویر په نوم یادیږي. مثلاً په (1) ش کې b_1 د a_1 ، b_2 د a_3 او b_3 د a_2 تصویرونه دي . د A سټ د ټولو عناصرو د تصویرونو سټ، چې د B یو فرعي سټ تشکیلوي ، د تابع د قیمتونو سټ (Range) په نوم یادیږي.[28]

توابع اکثراً د انګلیسي د الفبا تورو لکه G,F ,g,f ، ... په واسطه ښودل کیږي. دا هم زیاتوو چې که د f تابع دومین (domain) A او کودومین(codomain) B وي ، نو د A سټ د هر عنصر x تصویر په B کې په f(x) ښودل کیږي . چې په لنډ ډول ئې داسې لیکو:

$$\begin{aligned} f: A &\longrightarrow B \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

2.3 تعریف

د A او B دوو سټونو له پاره دA او B د کارتزین ضرب چې په A×B سره ښودل کیږي، داسې تعریف کوو :

$$A \times B := \{(x, y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

4. مثال

که چیرې A={1,2,3} او B={4,5} وي ، نو:

$$A\times B=\{(1,4); (1,5); (2,4); (2,5); (3,4); (3,5)\} \ .$$

یعنې $A \times B$ د ټولو هغو جفت مرتبو جوړو سټ دی ، چې اوله مرکبه ئې په A او دوهمه مرکبه ئې په B کې شامله وي.

3.3 تعریف

که د f تابع د تعریف ناحیه (D(f)) او د قیمتونو ناحیه(B(f))د ℝ سره مساوي وي، په دې حالت کې هره تابع د $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ یو فرعي سټ، یعنې د

$G(f):=\{\ (x,y)\ /\ x \in D(f) \wedge\ y \in\ B(f) \wedge y = f(x)\}$

ست ړابښئي ، او د ګراف(graph) په شکل یې د قائمو مختصاتو په سیستم کې ښودلی شو .

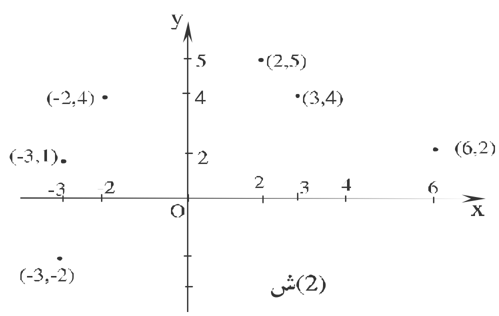
5. مثال

په لاندینیو افادو کې د توابعو د تعریف او قېمتونو ناحیې په حقیقي اعدادو کې شاملې دي . F ، gاوH هره یوه په تابع پورې اړه لري او Gتابع نه دی ، ځکه چې په G کې اقلاً یوه مرتبه جوړه شته چې اول عنصر ئې یوازې د یو عنصر سره اړیکه نه لري.

$F=\{(2,5);\ (3,4);\ (5,4)\}.$
$g=\{(x, x+3)/x \in \{1,5,9\}\}.$
$H=\{(x, x^2)/x \in \mathbb{R}\}.$
$G=\{(1,2);\ (3,4);\ (1,3)\}.$

6. مثال

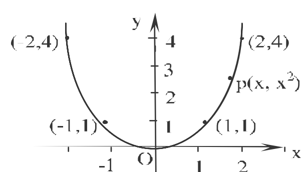
د $f=\{(-3,-2);\ (-2,4);\ (2,5);\ (3,4);\ (6,2)\}$ تابع ګراف په لاندې ډول دی .



ش(2)

7. مثال

د f تابع ګراف که $f(x)=\mathbf{x^2}$ او $D(f)=\mathbb{R}$ وي ، یو پارابول دی چې د قېمتونو ناحیه یې $B(f)=\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ کیږي.

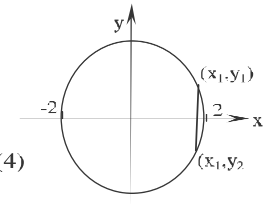


ش(3)

8. مثال

د $y=\sqrt{4-x^2}$ افاده چې دومین ئې $[-2,2]$ دی ،د دایرې ګراف لري او په تابع پورې اړه نه لري.

ش(4)



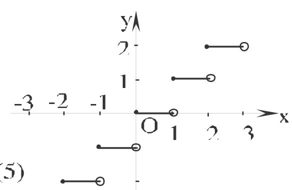
(4)ش

په یاد بایدولرو چې هره تابع یو ګراف رانښئي ، خو هر ګراف په یوه تابع پورې اړه نه لري. مثلاً د پورته مثال ګراف د تابع ګراف نه دی ، ځکه چې هر x د [2,2−] انترول څخه یوازې او یوازې د یو y سره اړیکه نه لري. یعنې که د y محور سره یو موازي رسم کړو دایره په دوو نقطوکې قطع کوي. دا یو ښه ازماینښت دی چې پوه شو ، چې ایا یو ګراف د تابع څخه نمایندګي کوي او که نه ؟ . نو ددې منظور په خاطر د y محور سره یو موازي رسموو که ګراف ئې په دوو یا زیاتو نقطو کې قطع کړ ، نو ګراف په تابع پورې اړه نه لري او که ګراف یوازې په یوه نقطه کې یې قطع کړي نو ګراف د یوې تابع ګراف دی .

4.3 تعریف "د ګاوس تابع"

$G(x) :=[x]\ ;([x] \in \mathbb{Z}\ ;\ [x] \leq x < [x] + 1$.

یعنې د ګاوس تابع چې په[x] سره ښودل کیږي ، د لوی تام عدد سره چې کوچنی یا مساوي په x سره دی .اړیکه لري . په پورته مثال کې د $G(x)=[x]$ تابع ته د ګاوس (Gause) تابع ویل کیږي. څرنګه چې دا تابع د ... ، $[0,1)$. $[-1,0)$,$[-2,-1)$ په انترولونو کې د ...,-2,-1,0,1,2 ثابت قیمتونه اخلي ،ګراف ئې یوه سلسله افقي خطونه دي چې د ښی خوا انجام ئې په هغه کې نه دی شامل.(5)ش

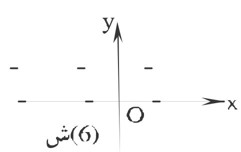


(5)ش

5.3 تعریف

د "Dirichlet"[1] تابع داسې تعریف شویده :

$$X(x):=\begin{cases} 1; x \in \mathbb{Q} \\ 0; x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \quad ; D(X) = \mathbb{R}; B(X) = \{0,1\}$$



(6)ش

[1] Dirichlet, peter Gaustav Lejenune (1805-1859) آلماني ریاضي دان.

6.3 تعریف

د f تابع د $A \subset D(f)$ پر مخ د پورته خوا څخه محدوده بلل کیږي ،که یو $b \in \mathbb{R}$ موجود وي داسې چې $\forall x \in A ;\ f(x) \leq b$ صدق وکړي.

همدارنګه f ته دښکته خوا څخه محدوده ویل کیږي.که یو $b \in \mathbb{R}$ موجود وي چې د هغې له پاره $\forall x \in A ;\ f(x) \geq b$ صدق وکړي .

یوې تابع ته محدوده ویل کیږي ،که د پورته او ښکته خوا څخه محدوده وي.

9. مثال

د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع د $D(f)=\mathbb{R}-\{0\}$ پر مخ دپورته او ښکته خوا څخه نده محدوده ،ولې د $\mathbb{R}^+$ پر مخ د ښکته خوا څخه محدوده ده.ځکه چې د $\forall x \in \mathbb{R}^+$ له پاره $f(x) \geq 0$ صدق کوي . همدارنګه د f تابع د $[1,2]$ انترول پر مخ محدوده ده .ځکه چې :

$$\forall x \in [1,2]\ ;\ \frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$$

په لاس راځي .

7.3 تعریف

د f او g د تعریف ناحیې په ترتیب سره $D(f)$ او $D(g)$ دي ، تعریف کوو چې:

$$(f+g)(x):= f(x)+g(x)\ ;\ D(f+g)=D(f)\cap D(g)$$
$$(f\cdot g)(x):=f(x)\cdot g(x)\ ;\ D(f\cdot g)=D(f)\cap D(g)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) := \frac{f(x)}{g(x)}\ ;\ \ D(\frac{f}{g}) = D(f) \cap D(g) - \{x/x \in D(g)\ ;\ g(x) = 0\}\ .$$

همدارنګه f او g سره مساوي ،که لاندې افادې صدق وکړي.

$$f=g \Rightarrow D(f) = D(g)\ \ ;\ \forall x \in D(f) \cap D(g)\ ,\ \ f(x) = g(x).$$

8.3 تعریف

د $f:D(f)\rightarrow B \subset \mathbb{R}$ تابع ته یو- یویا انجکتیف (**ingective**) ویل کیږي که

$$\forall\ x_1, x_2 \in D(f) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

صدق وکړي .

کولی شو چې د $f:D(f)\longrightarrow B(f)$ ، یوې انجکتیف تابع له پاره معکوسه تابع په لاندې ډول تعریف کړو:

$$\begin{aligned} f^{-1}: B(f) &\longrightarrow D(f) \\ y &\longrightarrow x\ ;\ y = f(x) \end{aligned}$$

دلته واقعاً یوه تابع تعریف کیږي، ځکه چې د هر $y\in B(f)$ له پاره یوازې یو $x\in D(f)$ موجود دی چې د هغې له پاره $f=(f^{-1})^{-1}$ صدق کوي.

9.3 تعریف

د $f:D(f)\to B(f)$ تابع ته سرجکتيف (Surjective) ویل کیږي ،که چېرې $B(f)=B$ وي . هره تابع چې په یوه وخت کې سرجکتيف او انجکتيف وي، بایجکتيف(Bijective)یا یو په یو تومول کیږي.

10. مثال

i) $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ تابع چې $f(x):=x+1$ دی یوه انجکتيف تابع ده اود سرجکتيف خاصیت نه لري .
ځکه چې که $x_1\neq x_2$ فرض کړو نو د تعریف له مخې لیکو چې :

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1+1=x_2+1\Rightarrow x_1=x_2\ .$$

یعنې د x_1 او x_2 په دوو مختلفو قیمتونو سره د تابع قیمتونه هیڅ وخت نه شي مساوي کیدای او هغه وخت سره مساوي دي چې $x_1=x_2$ شي.په همدې ډول د $1\in B(f)=\mathbb{R}^+$ له پاره هیڅ عنصر په $D(f)=\mathbb{R}^+$ کې نه شته چې $f(x)=1$ شي . یعنې $B(f)\neq\mathbb{R}^+$دی او د سرجکتيف خاصیت نه لري.

ii) د $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ تابع چې $f(x)=\begin{cases}1 & ;x=1\\ x-1; & x>1\end{cases}$ سره دی ، سرجکتيف ده اود انجکتيف خاصیت نه لري .ځکه چې:

$$x_1=1;x_2=2\Rightarrow x_1\neq x_2\Rightarrow f(x_1)=f(x_2)=1\ .$$

د سرجکتيف له پاره د هر $y\in B=\mathbb{R}^+$ له پاره یو $x\in D(f)=\mathbb{R}^+$ موجود دی چې $x=y+1$ کیږي.دلته

$$y\in\mathbb{R}^+\Rightarrow y+1\in\mathbb{R}^+\Rightarrow x\in\mathbb{R}^+\ .$$

او د: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$; $f(x)=-2x-1$ تابع بایجکتيف ده.

10.3 تعریف

که چېرې $D(f)$ او $D(g)$ په ترتیب سره د f او g توابعو د تعریف ناحیې وي ،نو د f او g ترکیب چې په $(g\circ f)$ سره ښودل کیږي داسې تعریف کوو:

$$(g\circ f)(x):=g(f(x))$$
$$D(g\circ f):=\{x\in D(f)/f(x)\in D(g)\}$$

11. مثال

$$f(x):=\frac{1}{x^2+1}\ ;\ D(f)=\mathbb{R}$$
$$g(x):=\frac{x}{x-1};D(g)=\mathbb{R}-\{1\}$$

$$(g\circ f)(x)=\frac{f(x)}{f(x)-1}=\frac{\frac{1}{x^2+1}}{\frac{1}{x^2-1}-1}=-\frac{1}{x^2}\ ;\ D(g\circ f)=\mathbb{R}-f(0)=\mathbb{R}-\{0\}$$

$$(f\circ g)(x)=\frac{1}{(g(x))^2+1}=\frac{1}{(\frac{x}{x-1})^2+1}=\frac{(x-1)^2}{2x^2-2x+1}$$

$$D(f\circ g)=\mathbb{R}-\{1\}$$

د پورتني مثال څخه معلوميږي چې د توابعو په ترکيب کې په عمومي ډول سره تبديلي قانون صدق نه کوي او اتحادي قانون د**تل** له پاره صدق کوي. يعنې

$$(h\circ g\circ f)(x):=(h\circ(g\circ f)(x))=((h\circ g)\circ f)(x)\quad .$$

11.3 تعريف

د f يوه تابع د $D(f)\subseteq A$ پر مخ په نظر کې نيسو :

i) د f تابع ته دقيق مونوتون متزايد (يا مونوتون متزايد) ويل کيږي که

$\forall x_1, x_2 \in A$ او $x_1 < x_2$ له پاره $f(x_1) < f(x_2)$ (يا $f(x_1) \leq f(x_2)$) صدق وکړي.

ii) د f تابع ته دقيق مونوتون متناقص (يا مونوتون متناقص) ويل کيږي که $\forall x_1, x_2 \in A$ او

$x_1 < x_2$ له پاره $f(x_1) > f(x_2)$ (يا $f(x_1) \geq f(x_2)$) صدق وکړي.

د f تابع ته مونوتون ويل کيږي که چېرې د A پر مخ د مونوتون متزايد (يا دقيق مونوتون متزايد) ، مونوتون متناقص(يا دقيق مونوتون متناقص) خاصيت ولري.

1.3 دعوى

که چېرې د f تابع په $D(f)$ کې دقيق مونوتون متزايد(يا دقيق مونوتون متناقص) وي،په دې صورت کې دf له پاره معکوسه تابع f^{-1} شته چې هغه د $B(f)$ پر مخ دقيق مونوتون متزايد(يا دقيق مونوتون متناقص) دی.

ثبوت

ددې مطلب له پاره بايد وښيو چې $f{:}D(f)\to B(f)$ تابع انجکتيف همدارنګه بايجکتيف دی. بنا پردې فرض کوو چې $x_1, x_2 \in D(f)$ او $f(x_1) = f(x_2)$ دی. که $x_2 < x_1$ وي ، نو د مونوتوني حالت په نظر کې نيولو سره $f(x_1) < f(x_2)$ کيږي. يا که چېرې $x_2 < x_1$ وي،نو $f(x_2) < f(x_1)$په لاس راځي.له دې وجې څخه $x_2 = x_1$ دی او f د انجکتيف خاصيت لري . په نتيجه کې د f تابع بايجکتيف هم ده يعنې د f^{-1} له پاره $D(f^{-1}) = B(f)$ موجود دی. بنا پردې د $y_1 < y_2$ $(y_1, y_2 \in D(f^{-1}))$ له پاره د $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in D(f))$ يوازيني عناصر موجود دي چې: $y_1=f(x_1)$ او $y_2=f(x_2)$ کيږي. که $x_1 \geq x_2$ وي ، نو $f(x_1) \geq f(x_2)$ په لاس راځي . چې په دې ترتيب سره دعوي په ثبوت رسيږي. (دمونوتون متناقص په حالت کې ثبوت دپورتني حالت سره مشابه دي).[33] ■

12. مثال

د $f(x) = 2x$ تابع له پاره معکوسه تابع په لاس راوړ ی او د دواړو گراف رسم کړی.

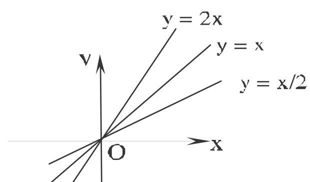
حل

ددي له پاره چې f^{-1} په لاس راوړو په لاندې توگه سره عملیه اجراکوو:

اول د $y=2x$ معادله د x له پاره حلوو اوبیا د x پرځای y لیکو. یعنې

$$y=2x \Rightarrow x = \frac{y}{2} \Rightarrow y = \frac{x}{2} .$$

دلته د $f(x) = 2x$ له پاره، معکوسه تابع $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$ ده، چې گرافونه يي په (7) ش کې لیدلی شئ.



ش(7)

13. مثال

د $f(x)=x^3$ له پاره معکوسه تابع او همدارنگه د هغې گراف په لاس راوړو .

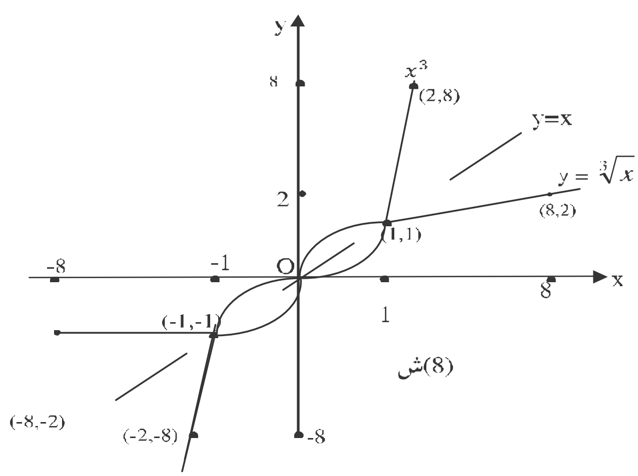
حل

$$y = f(x)=\mathbf{x^3} \Rightarrow \mathbf{x} = \sqrt[3]{\mathbf{y}} \Rightarrow \mathbf{y} = f^{-1}(x) = \sqrt[3]{\mathbf{x}} .$$

د f او f^{-1} د گرافونو د رسمولو په خاطر لاندې جدولونه ترتیبوو :

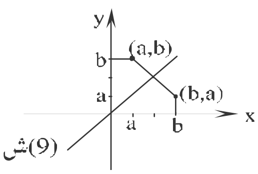
x	-27	-8	-1	0	1	8	27
$f(x)=\sqrt[3]{x}$	-3	-2	-1	0	1	2	3

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)=x^3$	-8	-1	0	1	8	27



ش(8)

د پورتنیو جدولونو څخه معلومیږي چې که (a,b) د $f(x)=x^3$ تابع د ګراف یوه نقطه وي نو (b,a) د $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x}$ د ګراف یوه نقطه ده. یعنې د یوې تابع او د هغې معکوسې تابع ګرافونه نظر $y=x$ خط ته یو د بل متناظر دي. دا هم باید ووایو چې $f^{-1}(x)$ د $\frac{1}{f(x)}$ مفهوم نلري . یعنې ($f^{-1}(x) \neq \frac{1}{f(x)}$)دی . (9)ش وګوری :



ش(9)

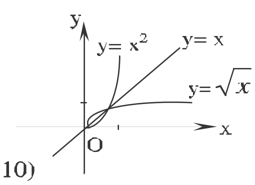
14. مثال

که $x \geq 0$ وي ،د $y=\sqrt{x}$ تابع له پاره معکوسه تابع او د هغې ګراف په لاس راوړی :

حل

$$y=\sqrt{x} \Rightarrow x=\sqrt{y} \Rightarrow y=x^2 \quad .$$

دلته $y=f(x)=\sqrt{x}$ او $y=f^{-1}(x)=x^2$ یو د بل معکوسې تابع دي، چې ګرافونه ئې په لاندې ډول دي .



ش(10)

دتابع ډولونه

تابع د هغو الجبري عملیو له مخې چې د یوې تابع حدونه د هغې په واسطه اړیکې سره لري لاندې ډولونه لري .

i) پولینومي تابع

هغه تابع ده چې لاندې شکل ولري

$$f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \; ; a_n \neq 0$$

دلته $a_n, \dots, a_1, a_0$ ثابت عددونه او $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ دی چې د پولینوم درجه رانبیي.

ii) الجبري تابع

د $y=f(x)$هره تابع چې دهغې له پاره د

$$p_n(x)\, y^n + p_{n-1}(x) y^{n-1} + \dots\dots + p_1(x) y + p_0(x) = 0 \qquad \cdots \qquad (1)$$

معادله صدق وکړي ،الجبري تابع بلل کیږي او $p_n(x), \dots, p_0(x)$ د x له جنسه پولینومونه دي.

iii) الجبري ناطقه تابع

که یوه تابع د $p(x)$ او $q(x)$ دوو پولینومونو دتقسیم ($\frac{p(x)}{q(x)}$) په شکل ولیکل شي ،دالجبري ناطقې تابع په نوم یادیږي اوپرته له دي څخه یوه غیر ناطقه تابع ده. مثلاً د $f(x)=\frac{x^3+2x^2-3x+1}{x^2-x-1}$ تابع یوه الجبري ناطقه تابع ده.

iv) ترانسنډنټل تابع (Transcendental)

هغه تابع چې الجبري شکل و نلري،د ترانسنډنټل توابعو په نوم یادیږي. د مثال په توګه $f(x)=a^x$ ، $f(x)=\log x$ او ټولې مثلثاتي توابع د ترانسنډنټل توابعو مثالونه دي. هغه توابع چې ددې توابعو او الجبري توابعو د ترکیب څخه په لاس راځي ، هم د ترانسنډنټل توابعو له جملې څخه دي لکه.

$$g(x)=x^2 \cos x - x^3 + 2^x + x$$

نوټ

په پورته توګه یوازې د توابعو ډولونه ،د هغې د الجبري ترکیب له مخې درته وښودل شول. ددوی د ډلې څخه هغه توابع چې په عالي ریاضیاتو او ورځنې ژوند کې ډېر داستعمال ځایونه لري، لکه مثلثاتي ، اکسپونشیال ،لوګارتمیک او ځنې نور به د څو مثالونو وروسته په مفصله توګه درته وښودل شي .

15. مثال

د $f(x)=\frac{x-1}{x\sqrt{x^2+1}}, (x \neq 0)$یوه الجبري تابع ده، ځکه چې که $y=f(x)$ وضع کړو،په لاس راځي چې:

$$y=\frac{x-1}{x\sqrt{x^2+1}} \Rightarrow (x\sqrt{x^2+1})y=x-1$$
$$\Rightarrow x^2(x^2+1)y^2 = x^2-2x+1$$
$$\Rightarrow (x^4+x^2)y^2 = x^2-2x+1$$
$$\Rightarrow (x^4+x^2)y^2 - x^2+2x-1 = 0$$

وروستی رابطه د (1) رابطې شکل لري او یوه الجبري تابع ده.

همدارنګه $g(x)=\frac{\sqrt{x}+1}{x+1}, (x \neq -1)$.یوه الجبري غیر ناطقه تابع او $f(x)=x^{\frac{-3}{2}}$ یوه الجبري تابع ده ،ځکه چې که $y=f(x)$وضع کړو لرو چې :

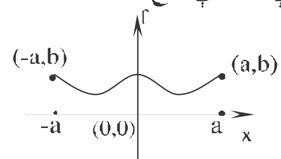
$$y=x^{\frac{-3}{2}} = \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} \Rightarrow \sqrt{x^3}y = 1 \Rightarrow x^3y^2 - 1 = 0 .$$

12.3 تعریف (جفت او طاق تابع)

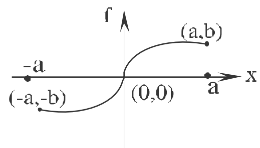
د $f(x)$ تابع جفت بلل کیږي ،که د تعریف په ناحیه کې ئې $f(-x) = f(x)$صدق وکړي او طاق بلل کیږي که $f(-x)= -f(x)$ شي.

16. مثال

د $f(x)=x^4$ پولینومي تابع ، جفت خاصیت لري. ځکه چې $f(-x)=(-x)^4=x^4 = f(x)$ کیږي او د $g(x)=x^3$ تابع، طاق خاصیت لري. یعنې$g(-x)=(-x)^3=-x^3 = -g(x)$ کیږي. داسې توابع هم شته چې نه جفت او نه طاق خاصیت لري لکه د $h(x)=x^3 + x^4$ تابع. د f په جفته تابع کې که (a,b) د f تابع د ګراف یوه نقطه ، یعنې$f(a)=b$ وي، نو $(-a,b)$ هم د هغې دګراف یوه بله نقطه ده چې په هغې کې$f(-a)=b$ کیږي. په دې حالت کې وایو چې د جفتې تابع ګراف نظر د y محور ته متناظر دی (11_a)ش.



ش (11_a)



ش (11_b)

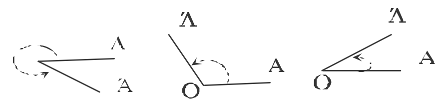
همدارنګه که (a,b) د طاق تابع د ګراف یوه نقطه یعنې $f(a)=b$ وي ،په دې صورت کې $f(-a)=-b$ کیږي او $(-a,-b)$) هم د طاق تابع د ګراف یوه بله نقطه ده. په دې صورت کې وایو چې د طاق تابع ګراف نظر مبدا ته متناظر دی (11_b) ش.

2. مثلثاتي توابع

مثلثاتي توابع دترانسندنټل توابعو له ډلې څخه دي، چې په ریاضیاتو کې د ډېرو مشهورو توابعو په جمله کې شمېرل کیږي او د دایروي توابعو یا مثلثاتي توابعود عنوان لاندې ئې تر څېړنې لاندې نیسو. داډول توابع ټل په انجینري لکه د سړکونو په لېول کارې، د ارتفاعاتو په معلومولواو همدارنګه دنظامي، فزیکي او ریاضیکي مسایلو په حل کې ډېرې زیاتې استعمالیږي. مونږ د مثلثاتي توابعو د مطالعې له پاره هغه څه چې په مثلثاتي توابعو پورې اړه لري په لنډ ډول سره یې په دې ځای کې تر نظر لاندې تېرو او د زیاتو معلوماتو د لاسته راوړلو له پاره به په راتلونکې کې په مفصله توګه تر نظر لاندې و نیول شي.

زاویه

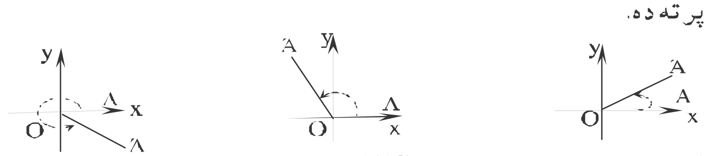
زاویه د ثابتې نقطې"O" په چاپېر (د ساعت ستنې ددوران په خلاف لور) د نیم خط(OA) د دوران څخه عبارت دی(12)ش.



ش(12)

د زاوئې ستنډرډ حالت

که چېرې د يوې زاوئې لومړی ضلع د x په محور، راس ئې د قائيمو مختصاتو په مبدا کې وي ، داسې چې دوهمې ضلعې ئې د ساعت د ستنې په خلاف لور دوران موندلی وي . نو وايو چې زاويه په ستنډرډ حالت کې پر ته ده.



ش(13)

د زاويې د اندازه ګيری واحدات

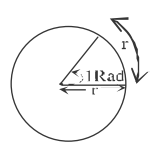
i) قايمه زاويه

له هغې زاويې څخه عبارت ده چې د هغې ضلعې يو پر بل باندې عمود وي.دا چې د يوې نقطې په چاپير څلور قايمې ځای کيږي، بنا پردې قايمه زاويه د زاويې د اندازې له پاره د واحد په څېر نيول کيږي .

ii) درجه

د زاويې هغه مقدار دی چې د هغې پراخوالی د يوې قايمې زاويې نوي-امه (90) حصه وي.له دې وجې څخه د يوې قايمې زاويې اندازه (نوي درجې) ده

iii) راديان د يوې دايرې هغه مرکزي زاويه ده چې د هغې د مخامخ قوس اوږدوالی د هغې دايرې د شعاع داوږدوالي سره مساوي وي.

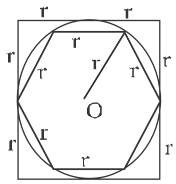


ش(14)

د دايرې د محيط او قطر تر منځ نسبت

د دايرې د محيط او قطر تر منځ نسبت د **π** په حرف سره ليکي. يعنې که د دايرې محيط c او شعاع يې r وي نو $\pi \approx \frac{c}{2r} \Rightarrow c \approx 2\pi r$ کيږي . π يو ثابت غير ناطق عدد دی او قيمت يې د 3 او 4 تر منځ ($3 < \pi < 4$) په لاندې ډول ئې تخمين کوو .

يوه دايره د r په شعاع، يوه منظمه شپږضلعي چې د راکړل شوي دايرې په واسطه احاطه شوي وي او همدارنګه د دايرې يوه محيطي مربع چې ضلعې يې په دايره باندې مماس وي ، په نظر کې نيسو .



ش(15)

ښکاره ده چې د شپږضلعي محیط 6r ،ددایرې محیط 2πr او د مربع محیط 8r دی . د شکل له مخې لیکو چې :

$$6r < > 2\pi r < 8r \Rightarrow 3 < \pi < 4 \quad .$$

د π عدد ته د ارشمیدس[2] عدد هم ویل کیږي چې تخمیني قیمت یې د محاسبوي روشونو په مرسته ... $\pi \approx 3.141\ 592\ 654$ ټاکل شوی دی او 2π راډیان یې د 360^0سره معادل دی .

د راډیان او درجې تر منځ اړیکې

څرنګه چې 360^o د 2π راډیان سره معادل دي، نو که د زاویې وسعت په درجه(D)او په راډیان په(R) سره وښیو ، لرو چې :

$$\frac{D}{360} = \frac{R}{2\pi} \Rightarrow \frac{D}{180} = \frac{R}{\pi} \quad .$$

چې دا تناسب موږ ته د راډیان او درجې تر منځ داړولو رابطه راښيي. یعنې کولی شو چې درجه په راډیان او راډیان په درجه واړوو . د مثال په توګه د $30^o, 45^o$، او 270^o درجو له پاره لرو چې:

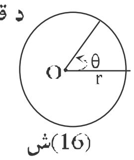
$$D = 30^o \Rightarrow R = \frac{30\pi}{180} = \frac{\pi}{6}\text{Rad} \Rightarrow 30^o = \frac{\pi}{6}\text{Rad.} \qquad (i$$

$$D=270^o \Rightarrow R = \frac{270\pi}{180} = \frac{3\pi}{2}\ \text{Rad} \Rightarrow 270^o = \frac{3\pi}{2} Rad. \qquad (ii$$

$$D=45^o \Rightarrow R = \frac{45\pi}{180} = \frac{\pi}{4}\ \text{Rad} \Rightarrow 45^o = \frac{\pi}{4} Rad. \qquad (iii$$

د یوې دایرې د مرکزي زاویې او د هغې د مقابل قوس تر منځ رابطه که چېرې د مرکزي زاویې (θ) اندازه په راډیان، د مرکزي زاویې د مقابل قوس اوږدوالی(s) او r د دایرې شعاع وي، نو د دایرې دمرکزي زاویې د مقابل قوس او په قوس پورې اړوند مرکزي زاویې تر منځ لاندې تناسب موجود دی

د قوس اوږدوالی د شعاع له جنسه	زاویه د راډیان له جنسه
2πr	2π
s	θ



ش(16)

---

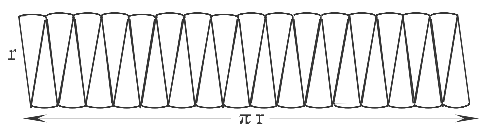
[3] Archimedes (c287-212BC) یونانی ریاضي دان.

له دې ځایه لیکو چې:

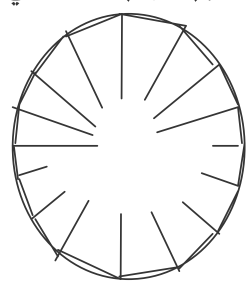
$$\Rightarrow s=\frac{2\pi r\theta}{2\pi}\Rightarrow r\theta\Rightarrow s=r\theta\ .$$

د دایرې مساحت

یوه دایره د r په شعاع په نظر کې نیسو او د (17)ش له مخې د دایرې مساحت په n مساوي برخو(مثلثو) باندې داسې ویشو چې یو راس یې د دایرې په مرکز او دریمه ضلع یې د دایرې د محیط د وتر څخه تشکیل شوي وي. که دا مثلثونه یو د بل مخامخ څنګ په څنګ کېښودل شي، یو شکل د مستطیل په څېر په لاس راځي. (18) ش



(18)ش



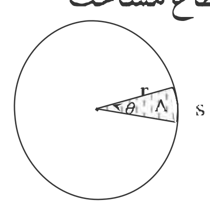
(17)ش

دلته په هره اندازه چې د مثلثونو په شمېر کې زیاتوالی راځي او(18)ش د مستطیل شکل ته نږدې کیږي. داسې چې عرض یې r ، اوږدوالی یې د دایرې د محیط نیمائي یعنې د π r په لور درومي.په دې حالت کې د دایرې مساحت د مستطیل مساحت ته نږدې والی کوي او د دایرې مساحت $S\approx \pi r^2$ کیږي[29] .

د دایرې د قطاع مساحت

مساحت	مرکزي زاویه
πr^2	2π
A (قطاع)	θ

$$\Rightarrow A=\frac{\pi r^2\theta}{2\pi}=\frac{1}{2}r^2\theta$$



(19)ش

د دایرې یوه قطعه چې شعاع ئې r او د دایرې د دوو شعاعو تر منځ زاویه θ ده په نظر کې نیسو او د لاندې تناسب په واسطه د دایرې د قطاع مساحت په اسانۍ سره محاسبه کولی شو.

دلته θ د راډیان له جنسه او A د دایرې د قطاع مساحت دی.

17. مثال

د دايرې شعاع $r=10cm$ ده ، محيط او مساحت ئې پيدا کړی . همدارنګه د هغې قطاع مساحت پيدا کړی ،چې په هغې پورې اړوند مرکزي زاويه (105^o)وي.

حل

د دايرې محيط $c=2\pi r$

$c\cong 20\cdot 3.14 = 62.8\ cm$.

د دايرې مساحت:

$S=\pi r^2 \cong (3.14)(10)^2 = 314cm^2$

د قطاع مساحت له پاره لروچې $105^o = \frac{7\pi}{12}\,rad \Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12}\,rad$. **همدارنګه د دايرې د مقابل** قوس اوږدوالی له پاره چې د 105^o زاوئې په مقابل کې پروت دی ليکو چې:

$$s = r\cdot\theta = 10\left(\frac{7\pi}{12}\right) = 18.32cm \quad \cong 18.32 \ .$$

نو:

(د دايرې د قطاع مساحت) $A=\frac{1}{2}r^2\theta = \frac{1}{2}(10)^2\ \frac{7\pi}{12} \Rightarrow A\cong 183.17cm^2$

13.3 تعريف

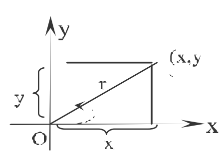
که چېرې دθ زاويه د ستندرډ په حالت ، (x,y) دθ زاوئې په دوهمه ضلع باندې يوه اختياري نقطه (پرته له مبدا) وي، نو د (x,y)او$(0,0)$ دوونقطو تر منځ فاصله$r=\sqrt{x^2+y^2}$ کيږي اومثلثاتي توابع د

$$\sin\theta := \frac{y}{r}\ ;\ \ \csc\theta := \frac{r}{y}$$

$$\cos\theta := \frac{x}{r}\ ;\ \ \sec\theta := \frac{r}{x}$$

$$\tan\theta := \frac{y}{x}\ ;\ \ \cot\theta := \frac{x}{y} \ .$$

څخه عبارت دي چې په درې واړو کې مخرج د صفر خلاف دی .



ش(20)

اساسي رابطې

پوهیږو چې محترم لوستونکي به د دا ډول رابطو سره کا ملاً اشنايي لري او دلته يوازې د دوی څخه په لنډ ډول یاداوري:

$$\tan\theta := \frac{y}{x} = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad .$$

$$\cot\theta := \frac{x}{y} = \frac{\frac{x}{r}}{\frac{y}{r}} = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} \ .$$

$$\sec\theta := \frac{r}{x} = \frac{1}{\frac{x}{r}} = \frac{1}{\cos\theta} \quad .$$

$$cosec\theta := \frac{r}{y} = \frac{1}{y/r} = \frac{1}{sin\theta} \quad .$$

$$\sin^2\theta + \cos^2\theta = \left(\frac{y}{r}\right)^2 + \left(\frac{x}{r}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1.$$

$$\Rightarrow \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 \quad .$$

$$1+\tan^2\theta = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2 = 1 + \frac{y^2}{x^2} = \frac{x^2+y^2}{x^2} = \frac{r^2}{x^2} = \sec^2\theta \quad .$$

$$\Rightarrow 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \ .$$

همدارنګه د x ، $\frac{\pi}{2} \pm x$ او $\pi \pm x$ زاویو له پاره چې د ستندرډ په حالت راکړل شوي دي ، لاندې رابطې هم صدق کوي .

$$\sin(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cos x \quad ; \quad \sin\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = \cos x \quad .$$

$$\cos(\tfrac{\pi}{2} - x) = \sin x \quad ; \quad \cos\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x \quad .$$

$$\tan(\tfrac{\pi}{2} - x) = \cot x \quad ; \quad \tan\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\cot x \quad .$$

$$\cot(\tfrac{\pi}{2} - x) = \tan x \quad ; \quad \cot\left(\tfrac{\pi}{2} + x\right) = -\tan x \quad .$$

$$sin(\pi - x) = sinx \quad ; \quad sin(\pi + x) = -sinx \quad .$$

$$cos(\pi - x) = -cosx \quad ; \quad cos(\pi + x) = -cosx \quad .$$

$$tan(\pi - x) = -tanx \quad ; \quad tan(\pi + x) = tanx \quad .$$

$$cot(\pi - x) = -cotx \quad ; \quad cot(\pi + x) = cotx \quad .$$

$$\sin(-x) = -\sin x \quad ; \quad \sin(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\cos x \quad .$$

$$\cos(-x) = \cos x \quad ; \quad \cos(\tfrac{3\pi}{2} + x) = \sin x \quad .$$

$$\tan(-x) = -\tan x \quad ; \quad \tan(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -\cot x \quad .$$

$$\cot(-x) = -\cot x \quad ; \quad \cot(\tfrac{3\pi}{2} + x) = -tgx \quad .$$

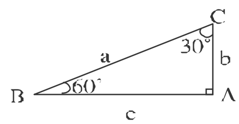
$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \quad ; \quad \cos(2\pi - x) = \cos x \quad .$$

$$\tan(2\pi - x) = -\tan x \quad ; \quad \cot(2\pi - x) = -\cot x \quad .[33]$$

د پورتنيو رابطو ثبوت د تمرين په ډول محترمو لوستونکو ته پرېښودل شو .

18. مثال

د 30^o او 60^o له پاره د مثلثاتي توابعو قیمتونه په لاس راوړی.(21 ش)



ش(21)

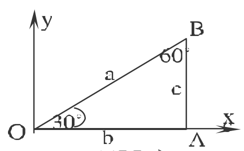
حل

څرنګه چې په یوه قا یم الزاویه مثلث کې د 30^o مقابله او د 60^o مجاوره ضلع(c)د وتر(a) نیمائي کیږي،نو لیکو چې :

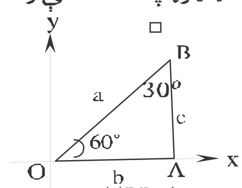
$$a^2 = b^2 + c^2 \ ; \ c = \frac{a}{2}$$

$$\Rightarrow a^2 = b^2 + (\frac{a}{2})^2 \Rightarrow b^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} \Rightarrow b^2 = \frac{3a^2}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{3}}{2}a.$$

اوس که پورتنی زاوئې د قائمو مختصاتو په سیستم کې دا سې په نظر کې ونیسو ،چې د 30^o او 60^o زاوئې هره یوه په ترتیب سره د ستندرډ په حالت کې راشي. (22_a) ش او (22_b) ش وګوری.



ش(22_a)



ش(22_b)

د (22_a)ش له مخې لیکو چې:

$$\sin 30^o = \frac{c}{a} = \frac{a/2}{a} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30^o = \frac{b}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan 30^o = \frac{c}{b} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}a} = \frac{a}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3} \cdot a} = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \tan 30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

او په (22_b)ش کې د 60^o مجاوره او 30^o مقابله ضلع (b) د وتر د نیمائي (a/2) او د 60^o مقابله ضلع (c) د $\frac{\sqrt{3}}{2}a$ کیږي . نو :

$$cos\ 60^o = \frac{b}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{a} = \frac{1}{2} \ .$$

$$\sin 60^o = \frac{c}{a} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \ .$$

$$\tan 60^o = \frac{c}{b} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}a}{\frac{a}{2}} = \sqrt{3} \ .$$

د جمع قوانین

د∝ ، β ، (β± ∝) زاویو د مثلثاتي نسبتونو تر منځ رابطې د جمع د قوانینو په نوم یادیږي، چې په لاندې ډول دي .

$\sin(\propto +\beta) = \sin \propto \cdot \cos\beta + \cos \propto \cdot \sin\beta$ (i

$\cos(\propto +\beta) = \cos \propto \cdot \cos\beta - \sin \propto \cdot \sin\beta$ (ii

$\sin(\propto -\beta) = \sin \propto \cdot \cos\beta - \cos \propto \cdot \sin\beta$ (iii

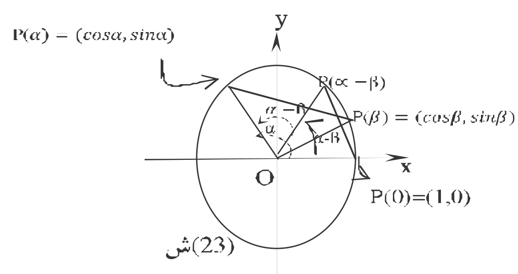
$\cos(\propto -\beta) = \cos \propto \cdot \cos\beta + \sin \propto \cdot \sin\beta$. (iv

په دې ځای کې موږ د پورتنیو رابطو څخه یوازې(iv) رابطه ثبوت کوواو د نورو رابطو په ثبوت کې د هغې څخه کاراخیستل کیږي .

ثبوت

$P(\propto -\beta), P(\beta), P(\propto)$ نقطې د واحدې دایرې(د دایرې شعاع یو واحد) په محیط باندې په نظر کې نیسواو د لاندې مختصاتو لرونکې دي ،(23) ش وګورئ.

$P(\beta) = (cos\beta, sin\beta)$
$P(\propto) = (cos \propto, sin \propto)$
$P(\propto -\beta) = (\cos(\propto -\beta) , \sin(\propto -\beta))$
$P(0)=(1,0)$



ش(23)

که $\propto > \beta$ وي د $P(\beta)$ او $P(\propto)$ نقطو تر منځ د قوس اوږدوالی $\propto -\beta$ دی، چې د $P(0)$او $P(\propto -\beta)$ نقطو د قوس د اوږدوالي سره معادل دی. دا هم پوهیږو چې د مساوي قوسونو په مقابل کې د وترونو اوږدوالی هم مساوي وي ، نو له دې وجې لیکو چې :

$$d(P(\propto -\beta), P(0)) = d(P(\propto), P(\beta))$$

$$= \sqrt{(\cos(\propto -\beta) - 1)^2 + (\sin (\propto -\beta))^2}=\sqrt{(cos\alpha - cos\beta)^2 + (sin\alpha - sin\beta)^2}$$

$$\Rightarrow (\cos(\propto -\beta) - 1)^2 + (\sin(\propto -\beta))^2 \quad = (\cos \propto -\cos\beta)^2 + (\sin \propto -\sin\beta)^2$$

$$\Rightarrow \cos^2(\propto -\beta) - 2\cos(\propto -\beta) + 1 + \sin^2(\propto -\beta)=$$

$$=cos^2 \propto -2\cos \propto\ cos\beta +cos^2\beta +sin^2 \propto -2sin \propto sin\beta + sin^2\beta$$

$$\Rightarrow \cos^2(\propto -\beta) + \sin^2(\propto -\beta) + 1 - 2\cos(\propto -\beta) = cos^2 \propto +sin^2 \propto +$$

$$+cos^2\beta+sin^2\beta \text{ -2cos}\propto cos\beta - 2sin \propto sin\beta$$

$$\Rightarrow 2\text{-}2\cos(\propto -\beta) - 2\cos(\propto -\beta) = 2 - 2\cos \propto\ \cos\beta - 2\sin \propto\ \sin\beta$$

$$\Rightarrow \cos(\propto -\beta) = \cos\propto \cdot \cos\beta + \sin\propto \cdot \sin\beta.$$

$$\sin(\propto +\beta) = -\cos\left(\propto +\beta + \frac{\pi}{2}\right) = -\cos(\,(\propto +(\beta + \pi/2))$$
$$= -\left[(\cos\propto \cdot \cos\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\propto \cdot\ \sin\left(\beta + \frac{\pi}{2}\right)\right]$$
$$= -\cos\propto\ (-\sin\beta) + \sin\propto\ (-\cos\beta)$$
$$= \cos\propto \cdot \sin\beta + \sin\propto \cdot\ \cos\beta$$
$$\Rightarrow \sin(\propto +\beta) = \sin\propto \cdot \cos\beta + \cos\propto \cdot \sin\beta.$$

په همدې ترتیب په لاس راځي چې :

$$\sin(\propto -\beta) = \sin\big(\propto +(-\beta)\big) = \sin\propto \cdot \cos(-\beta) + \cos\propto \cdot\ \sin(-\beta)$$

$$\Rightarrow \sin(\propto -\beta) = \sin\propto \cdot\ \cos\beta - \cos\propto \cdot\ \sin\beta \quad ■$$

19. مثال

(i $\tan(\propto +\beta) = \frac{\sin(\propto+\beta)}{\cos(\propto+\beta)} = \frac{\sin\propto\cos\beta+\cos\propto\sin\beta}{\cos\propto\cos\beta-\sin\propto\sin\beta} = \frac{\tan\propto+\tan\beta}{1-\tan\propto\tan\beta}$.

(ii که چېرې β په β- سره وضع شي لرو چې:

$$\tan(\propto -\beta) = \frac{\tan\propto-\tan\beta}{1+\tan\propto \cdot \tan\beta}$$

(iii $\sin 2\propto = \sin(\propto +\propto) = 2\sin\propto\ \cos\propto$

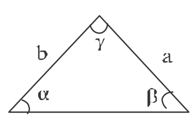
دلته د $\sin(\propto +\beta)$ د ا نکشاف په صورت کې د β په عوض ∝ لیکل شوی دی او $\sin(\propto +\beta)$ په $\sin 2\propto$ بدلیږي.

(iv $\cos\propto = \cos\left(\frac{\propto}{2} + \frac{\propto}{2}\right) = \cos^2\frac{\propto}{2} - \sin^2\frac{\propto}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\propto}{2}$.

د ساین قانون

که چېرې د مثلث داخلي زاوئې په ∝ ، β او γ او د هغوی مقابلې ضلعې په ترتیب سره په b,a او c سره وښیو ، لاندینی رابطه صدق کوي :

$$\frac{a}{\sin\propto} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$



ش(24)

چې د ساین قانون په نوم یادیږي.

د کوساین قانون

د کوساین قانون له پاره لرو چې :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\propto \quad .$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta \quad .$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ba \cdot \cos\gamma \quad .$$

د ساین او کوساین قوانینو اثبات د فیثاغورث قضیې، د مثلث د ارتفاع او د مشابه مثلثونو په نظر کې نیولو سره د تمرین په ډول پاتې شو.(د مشکل په صورت کې د یوولسم او دوولسم ټولګیو د مثلثاتو کتابونو ته مراجعه وکړی).

د هیرون (Heron) فرمول

که چیرې a، b او c د مثلث ضلعې، s د مثلث د محیط نیمائي یعنې $\mathbf{s = \frac{a+b+c}{2}}$ او **A** د مثلث مساحت وي، نو $A= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ صدق کوي.

دا فرمول هم په اسانی سره د مثلث د قاعدې او ارتفاع د حاصل ضرب نیمائي او د کوساین قانون په نظر کې نیولو سره ثبوت کیدلی شي.[25]

د مثلثاتي توابعو پریود

14.3 تعریف

د **f** تابع ته پریودیک (متناوبه) د p پریود په لرلو سره) ویل کیږي که ډېر کوچنی مثبت عدد $p\neq 0$ داسې موجود وي ،چې د هر $\forall x \in D(f)$ له پاره $x+p\in D(f)$ او $f(x+p)=f(x)$صدق وکړي.

20. مثال

د $f(x) =\sin x$ تابع پریودیک ده او پریودئې **2π** دی ، ځکه چې:

$$f(x+2\pi) = \sin(x + 2\pi) = \sin x = f(x)$$

کیږي. همدارنګه د cosine تابع هم پریودیک او پریود ئې 2π دی.

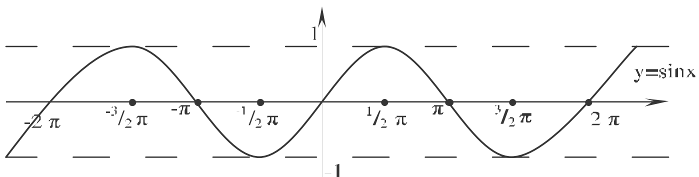
د مثلثاتي توابعو ګراف

پوهیږو چې د $y=\sin x$ او $y=\cos x$ توابعو پریود 2π دی ،یعنې د پورتنیو توابعو ګراف په معلومو انترولونو کې چې اوږدوالی یې 2π دی، تکراریږي. بنا پردې د دا ډول توابعو ګراف د $[0,2\pi]$ په انترول کې د لاندې جدول په ترتیب کولو سره رسموو.

x	0	$\pi/2$	π	$3\pi/2$	2π
sinx	0	1	0	-1	0
cosx	1	0	-1	0	1

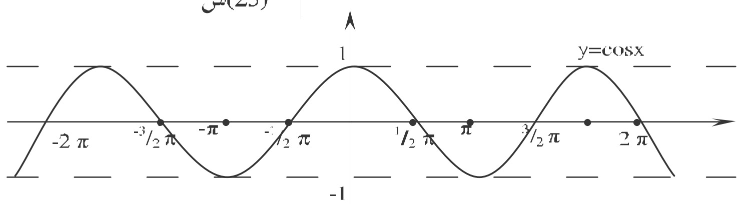
د یادونې وړ ده چې دلته د زاویې واحد(د x قیمت) د راډیان له جنسه په نظر کې نیول شوی دی . (25) ش وګوری :

د sine ګراف



ش(25)

د cosine ګراف



ش(26)

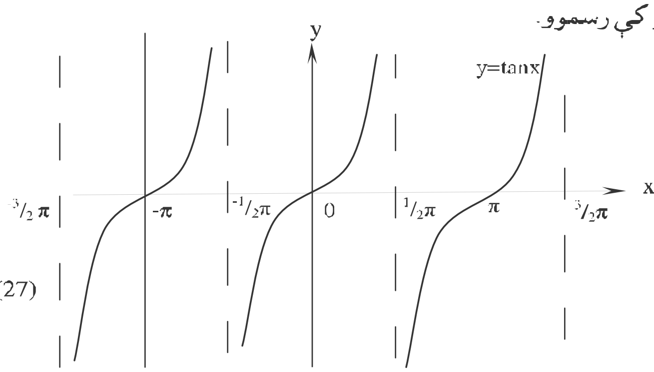
د tangent او cotangent توابعو ګرافونه

څرنګه چې $tanx=\frac{sinx}{cosx}$ او $cotx=\frac{cosx}{sinx}$ کیږي، نو

$$D_{tan}=\{x\in\mathbb{R}/cosx\neq0\}\ ;\ D_{cot}=\{x\in\mathbb{R}/sinx\neq0\}.$$

د tanx او cotx توابع پریودیک او پریود یې π دی. نو ځکه د پورتنیو توابعو ګراف په ترتیب سره د $(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ او $(0,\pi)$ په انټرولونو کې رسموو.

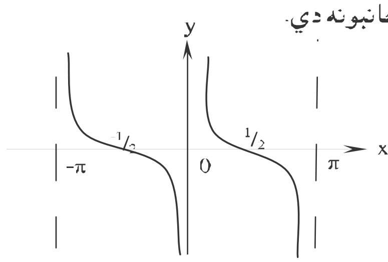
د tanx ګراف



ش(27)

دلته $x=\pm\frac{\pi}{2}$ مستقیمونه د y=tanx عمودي مجانبونه دي.

د cotx ګراف



ش(28)

د مثلثاتي توابعو معکوسې تابع ګانې

دلته د مثلثاتي توابعو د تعریف ناحیې داسې محدودې کوو، چې په هغې کې مثلثاتي توابع مونوتون متزاید یا مونوتون متناقص وي،نو په دې صورت کې مثلثاتي توابع د معکوسو توابعو لرونکي دي. د sin ، cos ، tan او cot توابعو له پاره معکوسې تابع په ترتیب سره په $\sin^{-1}$ ، $\cos^{-1}$ ، $\tan^{-1}$ او $\cot^{-1}$ سره ښیو ،چې په ځنې کتابونو کې په arc sin، arc cos، arc tan او arc cot سره هم ښودل کیږي. د مثلثاتي توابعو د معکوسو توابعو له پاره لرو چې :

$x=\sin y \Rightarrow y = \arcsin x$

$x=\cos y \Rightarrow y = \arccos x$

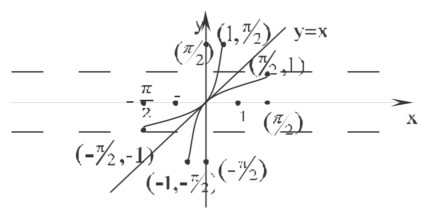
$x=\tan y \Rightarrow y = \arctan x$

$x=\cot y \Rightarrow y = \operatorname{arc\,cot} x$.

چې د تعریف او قیمتونو ناحیې یې په لاندې جدول کې لیدل کیږي .

f	arc sin	arc cos	arc tan	arc cot
D_f	[-1,1]	[-1,1]	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
B_f	$[^{-\pi}/_2,{}^{\pi}/_2]$	$[0,\pi]$	$(^{-\pi}/_2,{}^{\pi}/_2)$	$(0,\pi)$

څرنګه چې د معکوسو توابعو ګرافونه یو تر بله سره نظر د $y = x$ خط ته متناظر دي، نو موږ کولی شو چې د معکوسو توابعو ګرافونه د هغوی د اصلي توابعو(معکوسو توابعو) د ګرافونو څخه په لاس راوړو :



ش(29)

په همدې ترتیب سره کولی شو چې د arc tan ، arc cot او arc cos توابعو ګرافونه په ترتیب سره د cot,tan او cos توابعو د ګرافونو په مرسته په اسانی سره رسم کړو، چې ترسیم یې محترمو لوستونکو ته د تمرین په توګه پاتې شو.

نوټ که چیرې f او f^{-1} یو د بل معکوس توابع وي . نو $f^{-1}(f(x)) = x$ کیږي. یعنې:

$\arccos(\cos x)=x \quad ; x\in D_{\cos}.$

$\arcsin(\sin x)= x \quad ; x\in D_{\sin}.$

$y = \arcsin\frac{1}{2} \Rightarrow \sin y = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{6}$

21. مثال

یعني $\frac{\pi}{6} = y=\text{arc}\sin\frac{1}{2}$ کیږي.همدارنګه

$y = \text{arc}\sin\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

$(\sin(\frac{\pi}{4})) = \frac{\pi}{4}$

$\text{arc}\cos(\frac{-1}{2}) = \propto \Rightarrow \cos\propto = \frac{-1}{2} \Rightarrow \propto = \frac{2\pi}{3}$

$y = \text{arc}\cos(0) \Rightarrow y = \frac{\pi}{2}$

کیږي .

22. مثال

وښیی چې $\text{arc}\sin x = \text{arc}\cos(\sqrt{1-x^2}) = \text{arc}\tan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$ کیږي.

حل

فرِض کوو چې $\text{arc}\sin x=\theta$ دی. لرو چې

$\sin\theta = x \Rightarrow \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta} = \sqrt{1-x^2}$.

$\Rightarrow \text{arc}\cos\sqrt{1-x^2} = \theta$

$\Rightarrow \text{arc}\sin x = \text{arc}\cos\sqrt{1-x^2} = \theta$.

همدارنګه پوهیږو چې :

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \Rightarrow \theta = \text{arc}\tan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$.

$\text{arc}\sin x = \text{arc}\cos(\sqrt{1-x^2}) = \text{arc}\tan(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}})$.

23. مثال

وښیئ چې $\text{arc}\sin x+\text{arc}\cos x=\frac{\pi}{2}$ کیږي.

حل

$\text{arc}\sin x := \propto \Rightarrow \sin\propto = x$

$\text{arc}\cos x := \beta \Rightarrow \cos\beta = x$

$\Rightarrow \sin\propto = \cos\beta \Rightarrow \alpha = (\frac{\pi}{2} - \beta) \Rightarrow \alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \text{arc}\sin x+\text{arc}\cos x=\frac{\pi}{2}$. [33]

3. د اکسپونتسیا ل او طاقت تابع ګانې

دلته هم غواړو چې په لنډډول د اکسپونتسیال او طاقت توابعو څخه یادونه وکړو .

15.3 تعریف

که چیرې $a\in\mathbb{R}$ او $m\in\mathbb{Z}$ وي:

i) د $m>0$ له پاره $a^m := \prod_{i=1}^{m} a$.

ii) که چېرې $m< 0$ او $a\neq 0$ وي $a^m := \frac{1}{a^{-m}}$.

iii) که $m=0$ او $a\neq 0$ وي $a^m := 1$.

دلته a ته قاعده (Base)، m ته اکسپونتسیال (یا توان) او a^m ته د a، $m-$ ام طاقت ویل کیږي.

حسابي قاعدې

که چیرې $a, a_1, a_2\in\mathbb{R}-\{0\}$ او $m_1, m_2, m\in\mathbb{Z}$ وي.

i) $a^{m_1}\cdot a^{m_2} = a^{m_1+m_2}$

ii) $a_1^m . a_2^m = (a_1 . a_2)^m$

iii) $(a_1^{m_1})^{m_2} = (a)^{(m_1 . m_2)}$

2.3 دعوی

که چېرې $a\in\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ ، $n\in\mathbb{N}$ وي ، نو يوازې يو $x \geq 0$ د $x^n = a$ خاصيت په لرلو سره موجود دی.

ثبوت

د $f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ تابع په نظر کې نيسو داسې چې $f(x) = x^n$ وي..
دا تابع مونوتون متزايد او متمادي ده .بنا پردې ددې معکوسه تابع وجود لري او هغه هم متمادي، مونوتون متزايد ده او د $a\in\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ له پاره يو x د $x^n = a$ خاصيت په لرلو سره موجود ی. ■

3.3 دعوی

که $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ او $a \in \mathbb{R}^+$ وي ، په دې صورت کې

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad (a^{\frac{1}{q}})^p = (a^{\frac{1}{n.q}})^{n.p} \quad .$$

ثبوت

$$(a^{\frac{1}{q}})^p = (((a^{\frac{1}{n.q}})^{n.q})^{\frac{1}{q}})^p$$

$$=((((a^{\frac{1}{nq}})^n)^q)^{\frac{1}{q}})^p = ((a^{\frac{1}{nq}})^n)^p = (a^{\frac{1}{nq}})^{n.p}. ■$$

24. مثال

وښئی چې د $a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+ \cup [0]$ له پاره

$$(a_1 . a_2)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$$

صدق کوي.

حل

$$0 \leq (\sqrt{a_1} - \sqrt{a_2})^2 = a_1 + b_1 - 2\sqrt{a_1 b_1}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{a_1 b_1} \leq a_1 + b_1 \Rightarrow \sqrt{a_1 b_1} \leq \frac{1}{2}(a_1 + b_1)$$

$$\Rightarrow (a_1 b_1)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \quad \blacksquare$$

25. مثال

د $a \in \mathbb{R}^+$ له پاره وښئی چې $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ کیږي.

حل

i) بیان د $a=1$ له پاره سم دی.

ii) فرضوو چې $a>1$ دی. په دې حالت کې د $\{\sqrt[n]{a}\}_{n\in\mathbb{N}}$ یو مونوتون متناقص، د لاندې خوا محدود ترادف په لاس راځي. چې د هغې له پاره د $\sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}$ رابطه صدق کوي. ځکه که $\sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n]{a}$ وي، نو : $\left(\sqrt[n+1]{a}\right)^{n(n+1)} > \left(\sqrt[n]{a}\right)^{n(n+1)}$ کیږي. ددې څخه د $a^n > a^{n+1}$ رابطه په لاس راځي. یعنې $a \leq 1$ کیږي ،چې دا د فرضیې خلاف دی. د بلې خوا که $\sqrt[n]{a} < 1$ ولرو، په دې صورت کې د پورته خوا څخه محدود ، مونوتون متزاید او متقارب ترادف موجود دی. لرو چې :

$$\sqrt[n]{a} = 1 + h_n \;;\; h_n > 0$$

$$a=(1 + h_n)^n > 1 + nh_n \Rightarrow 0 < h_n < \frac{a-1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} h_n = 0.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

iii) د $0<a<1$ په صورت کې $a=\frac{1}{a'}$ وضع کوو :

$$\sqrt[n]{a} = \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} \Rightarrow a' > 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a'} = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a'}} = \frac{1}{1} = 1. \blacksquare$$

16.3 تعریف

د $f(x) = x^r$ تابع ، $(r\epsilon\mathbb{Q}$ ، $D(f)=\mathbb{R}^+)$ ته د طاقت تابع (Powe function) او د $f(x)=a^x$ تابع $(a\epsilon\mathbb{R}^+, D(f) = \mathbb{R})$ ته د اکسپونسیال (Exponential) تابع ویل کیږي ..

4.3 دعوی

i) د $f(x)=x^r$, ($r\in \mathbb{Q}$) تابع په $\mathbb{R}^+$کې متمادي ده.

ii) د $f(x)= a^x$ ، ($a\in\mathbb{R}^+$) تابع په $\mathbb{R}$ کې متمادي ده.

ثبوت (پرته له ثبوت څخه) . [33] ■

4. لوګاریتمي تابع

لوګاریتمي تابع . د ایلر (Euler[3]-1707-1783) په عقیده د اکسپوننسیال تابع ، یوه معکوسه مونوتون متمادي تابع ده. یعنې که د $y=f(x)=b^x$ ($b\in\mathbb{R}^+ ; b \neq 1$) اکسپوننسیال تابع راکړل شوي وي ، ددې څخه $x=b^y$ لیکو او د y له پاره ئې حل کوو او یوه نوي تابع په لاس راځي، چې د $x>0$ له پاره مونوتون او متمادي ده. په دې ځای کې د y اکسپوننت (توان) ته د x لوګاریتم د b ($b>0$)په قاعده ویل کیږي.او داسې ئې لیکو $y=\log_b x$.
دا چې $x=b^y$ د $x>0$ له پاره تل صدق کوي او له دې سببه د مثبتو عددونو له پاره لوګاریتم دتعریف وړ دی. د پورتنیو نتائیجو څخه پوهیږو چې د b^x تابع د$\forall x\in\mathbb{R}$ له پاره تعریف شوي ده. د $b>1$ له پاره مونوتون متزاید او د $b<1$له پاره مونوتون متناقص ده. په عمل کې $b>1$ فرض کیږي ، ځکه چې اکثراً لوګاریتم جدولونه هم د $b>1$ له پاره ترتیب شوي دي. د مثال په توګه $b=2,b=10$ یا $b=e$. له دې سببه مورږ د $b<1$حالت په نظر کې نیسو. پوهیږو چې:

$$\lim_{n\to\infty} b^{-n} = 0 \, ; \lim_{n\to\infty} b^{n} = \infty \ .$$

بنا پردې:

$$\lim_{x\to-\infty} b^x = 0 \ ; \ \lim_{x\to\infty} b^x = \infty \ ; \ B(f) = (0,\infty) \ .$$

د $f(x)=b^x$ تابع متمادي اومونوتون متزاید تابع ده ،نو f^{-1} وجود لري.

[3] Euler (1707- 1783) یو سویسی ریاضي دان.

17.3 تعریف

فرضوو چې $b>1$ دی.د $f(x)=b^x$ تابع معکوسې تابع (f^{-1}) ته د b په قاعده لوګاریتمیک تابع ویل کیږي او د لوګاریتم د تعریف له قراره د هر $x>0$ او هر y له پاره لرو چې

$$D(\log_b x)=\mathbb{R}^+ \;; f^{-1}(x)=\log_b x=y; x=b^y$$

$$x=b^y=b^{\log_b x}\ .$$

$$\Rightarrow y=\log_b b^y\ .$$

څرنګه چې $b^0=1$ او $b^1=b$ کیږي. نو

$$\log_b 1=0\ ;\log_b b=1\ .$$

يادونه

د لوګاریتم نوم د نسبتي عدد معنی ورکوي چې یونانیانو دا نوم د "**John Napier**[4]" په واسطه د $(\frac{a}{b})^n$ څخه اخیستلی دی.

5.3 دعوی

$$\log_b(x_1.x_2)=\log_b x_1+\log_b x_2 \qquad (i$$

$$\log_b x^{-1}=-\log_b x \qquad (ii$$

$$\log_b x^{\propto}=\propto\log_b x \qquad (iii$$

ثبوت

$$\log_b(x_1.x_2)=\log_b(b^{\log_b x_1}\cdot b^{\log_b x_2}) \qquad (i$$

$$=\log_b(b^{\log_b x_1+\log_b x_2})=\log_b x_1+\log_b x_2$$

$$0=\log_b(x^{-1}.x)=\log_b x^{-1}+\log_b x\ \Rightarrow\log_b x^{-1}=-\log_b x \qquad (ii$$

$$x^{\propto}=(b^{\log_b x})^{\propto}=b^{\propto\log_b x}\Rightarrow\log_b x^{\propto}=\log_b(b^{\propto\log_b x}) \qquad (iii$$

$$\Rightarrow\log_b x^{\propto}=\propto\log_b x\ .\ \blacksquare\ [12]$$

---

[4] Napier, John (1550 1617) سکاټلندی ریاضي دان.

5. تمرین

1. که چیرې $f(x)=\sqrt{x+1}$; $g(x)=\frac{1}{x}$ وي ، لاندې افادې ساده کړئ

i) $(2f+3g)(15)$ ii) $(f+g)(3)$

iii) $f^2(24)$ iv) $(f-g)(8)$

v) $\left(\frac{f}{g}\right)(35)$ vi) $(fg)(-2)$

2. که $f(x)=x^2+1$ او $g(x)=x^2-1$ وي، په دې صورت کې پیدا کړئ چې:

i) $(2f+3g)(15)=?$ ii) $f(f(2))=?$

iii) $g(f(g(1)))=?$ iv) $g(g(1))=?$

v) $f(f(f(0)))=?$ vi) $g(f(-1))=?$

3. د f او g توابع درکړل شویدي ایا $f(x)\equiv g(x)$ افاده د هغوی له پاره صحیح ده ؟

i) $f(x)=x$; $g(x)=(\sqrt{x})^2$

ii) $f(x)=\frac{x}{x}$; $g(x)=1$

iii) $f(x)=\frac{|x|}{x}$; $g(x)=\frac{x}{|x|}$

iv) $f(x)=(1+x^2)-(1-x)^2$; $g(x)=4x$

4. که چیرې $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$ او $g(x)=\frac{1+x}{1-x}$ وي.پیدا کړئ چې:

i) $(g\ o\ f)(x)=?$ ii) $(f\ o\ g)(x)=?$

iii) $(g\ o\ g)(x)=?$ iv) $(f\ o\ f)(x)=?$

5. د $f(x)=x^3$; $g(x)=x-1$ او $h(x)=\sqrt{x}$ په صورت کې لاندې افادې پیدا کړئ.

i) $(h\ o\ g\ o\ f)(x)=?$ ii) $g(g(f(x)))=?$ iii) $(f\ o\ g\ o\ h)(x)=?$

6. د $f(x)=ax+b$ یو خطي تابع پیدا کړئ ، چې د هغې له پاره لاندینۍ رابطې صدق وکړي

i) $f(2x+3)=3x-2$ ii) $f(1-x)=5x+1$ iii) $f(x+1)=2x$

7. د لاندینیو توابعو ګرافونه رسم کړئ:

i) $y=\frac{3}{x^2+1}$ ii) $y=x^2+x+1$

iii) $y=|x+1|+|x-1|$ iv) $y=1-x^2$

$y=\sqrt{9-x^2}$ (vi $y=|x|+|x+1|+1$ $(v$

8. د لاندینیو توابعو څخه کومه یوه جفت او کومه یوه طاق تابع ده.

$f(x)=0$ (ii $f(x)=\frac{x^2}{x^4+1}$ $(i$

$g(x)=\frac{1}{x}$ $(iv$ $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$ $(iii$

$f(x)=x^3-x+1$ $(iv$ $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{x^4+2}}$ $(v$

9. د $f(x)=x^2-4x+3$ تابع ،د تزاید او تناقص ناحیې پیدا کړی.

10. د $y=|x+1|+|x-1|$ تابع د تزاید او تناقص انترولونه پیدا کړی او دا هم وښیی چې په کوم انترول کې ثابته ده .

11. یوه مستطیلي څمکه د یوه سیم په واسطه چې12 واحده اوږدوالی لري احاطه شوي ده، داسې چې د هغې یوه ضلع x ده. هغه لوی انترول (a<x<b) پیدا کړی ،کوم چې د سیم په واسطه احاطه شوی مساحت د یوې متزایدې تابع شکل غوره کړي .

12. معلوم کړی چې د f تابع د I په انترول کې متزایده ده ،که چېرې او یوازې که چېرې د f - تابع د I په انترول کې متناقصه وي .

13. د θ قیمتونه په لاس راوړی، داسې چې $0\le\theta\le 2\pi$ وي.

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ (c $\cos\theta=0$ (b $\sin\theta=\frac{1}{2}$ (a

$\sin\theta=1$ (f $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; (e $\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$. (d

14. که $\sin\theta=\frac{1}{2}$; $\cos\theta>0$ وي ،د $\cos\theta$ قیمت په لاس راوړی.

15. د لاندې افادو قیمتونه پیدا کړی .

$\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)$ (b $\cos\left(\frac{13\pi}{4}\right)$ (a

$\sin\left(\frac{19\pi}{4}\right)$ (d $\cos(-4\pi)$ (c

16. دا چې د sin او cos توابعو پریود 2π دی، د لاندینیو توابعو پریود پیدا کړی :

$\cos 4\theta$ (c $\sin 3\theta$ (b $\sin\frac{\theta}{2}$ (a

17. د tan تابع جفت دی او که طاق ؟

18. د لاندینیو توابعو ګرافونه رسم کړی :

$y=2\sin x$ (b ; $y=\sin(x+\frac{\pi}{2})$ (a

$y=-2\sin\pi x$ (d ; $y=\cos(x-\frac{\pi}{2})$ (c

19. د لاندینیوافادو قېمتونه پیدا کړی .

a) $\arc \sin (\sin\frac{\pi}{17})$

b) $\cos(\cos^{-1}(\frac{5}{9}))$

c) $\arc \sin(\cos\pi)$

d) $\cos(\arc \sin(\frac{3}{5}))$

20. د لاندینیو افادو قېمتونه پیدا کړی.

a) $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$; b) $\sin\left(\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$; c) $\sin^{-1}(0)$

d) $\arc \sin\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) $\arc\cos(-1)$; f) $\arc\cos\left(\frac{1}{2}\right)$

21. ثبوت کړی چې :

a) $\arc \sin(1)+ \arc \sin(-1) = 0.$

b) $\arc \sin(1)+ \arc \cos(1) = \frac{\pi}{2}$.

c) $\arc \cos(\frac{1}{2})+\arc \sin(\frac{1}{2}) = \arc \cos(0)$.

22. وښییئ چې

a) $\arc \cos x=\arc \sin\sqrt{1-x^2}=\arc \cot\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

b) $\arc \tan x+\arc \cot g x = \frac{\pi}{2}$.

23. معلوم کړی چې : $\arc \cot (-x) = - \arc \cot (x)$ کیږي.

24. د لاندې توابعو ګرافونه رسم کړی .

i) $y= 2^x$

ii) $y=8^{-x}$

iii) $y=10^x$

iv) $y=0.6x$

25. که $f(x)=5^x$ وي و ښیی چې $\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 5^x(\frac{5^h-1}{h})$ کیږي .

26. داسې فکر وکړی چې د بکتریاوشمېر100 دی او د هرو درو ساعتونو په موده کې د هغو شمېر دوه چنده کیږي .

i) د بکتریاو شمېر د 16 ساعتونو وروسته پیدا کړی .

ii) د بکتریاو شمېر د t ساعتونو وروسته پیدا کړی .

iii) د بکتریاو شمېر د 20 ساعتونو وروسته پیدا کړی .

iv) د بکتریاوو شمیر گراف رسم کړی. او بیا هغه وخت تخمین کړی، چې په هغه کې د بکتریاو شمیر 50000 ته رسیږي .

27. ثبوت کړی چې د $f(x)=\frac{1-e^{\frac{1}{x}}}{1+e^{\frac{1}{x}}}$ تابع د طاق خاصیت ده .

28. د لاتینیو افادو قیمتونه پیدا کړی .

(i $\log_5 125 = ?$

(ii $\ln\left(\frac{1}{e}\right) = ?$

(iii $\log_3 100 - \log_3 8 + \log_3 50 = ?$

(iv $\log_2 6 - \log_2 15 + \log_2 20 = ?$

(v که $0<a\neq 1$ وي ، وښيي چې $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$ کیږي .

29. لاندینی معادلې د x له پاره حل کړی .

(i $2\ln x = 1$

(ii $\ln x + \ln(x+1) = 1$

(iii $e^{2x+3} - 7 = 0$

30. لاندې غیر مساوات حل کړی .

(i $e^x < 10$

(ii $2 < \ln x < 9$

(iii $e^{2-3x} > 0$

شلورم فصل

د تابع گانو لیمېټ او مشتق

1. د تابع گانو لیمېټ

د یوې تا بع لیمېټ (**limit**) د کلکولس له پاره د اساس په توګه پېژندلی شوچې په خاص ډول د انجنیري په تطبیقي مسائېلو کې ډېر زیات د استعمال ځایونه لري او زیات مسایل شته چې د لیمېټ څخه پرته د هغوی حل مشکل کار دی . د مثال په توګه د لحظوي سرعت ، د منحني میل،دمنحني د قوس اوږدوالی،د مغلقو او پیچلیو مساحتونو او حجمونو محاسبه ،د غیر محدود سلسلو مجموعه دمنحني دنورمال ،بای نورمال او ځنې نورو مطالعه د لیمېټ څخه پرته په دقیق ډول سره سرته نه شي رسیدلی . همدارنګه په ریاضي کې که د $f(x) = \frac{x^3-1}{x^2-1}$ افاده ولرو او و غواړو چې $f(1)$ په لاس راوړو، په دې صورت کې د $f(x)$ تابع په $x=1$ کې د $(\frac{0}{0})$ مبهم شکل غوره کوي، بیا هم موږ کولی شو چې x ته د یو په شاوخوا کې یوه ته نږدې اوډېر نږدې قېمتونه ور کړو، ترڅو د $f(x)$ وضعیت یا حرکت د یوه په شاوخوا کې ځانته معلوم کړو. همدا کار یعنې د یوې نقطې په شاوخوا کې(یو مجاورت کې) هغې نقطې ته نږدې او لانږدې د تابع دحرکت یا وضعیت مطالعه دلیمېټ د تعریف بنسټ تشکیلوي. مخکې له دې چې لیمېټ تعریف کړو، یو څو مثالونه د لیمېټ د مفهوم د ښه وضاحت له پاره کار کوو.

1. مثال

که $f(x)=2x^2+1$ وي اوx ته ،3 ته نږدې او لا نږدې قېمتونه ورکړل شي ،نو $f(x)$ به کوم قېمتونه ځانته غوره کړي.؟

حل

د مفهوم د وضاحت له پاره د قېمتونو یو جدول ترتیب کوو:

x	2.9	2.99	2.999	3.001	3.01	3.1
f(x)	17.82	18.8802	18.988002	19.012002	19.1202	20.22

لیدل کیږي چې که xد 3 عدد ته نږدې کیږي ، $2x^2+1$ د 19 په لور تقارب کوي . په دې صورت کې وایو چې د $2x^2+1$ افادې قېمت کله چې x دریو ته نږدې کیږي 19 دی. دا مفهوم د ریاضي په ژبه داسې لیکل کیږي:

$$\lim_{x\to 3}(2x^2+1) = 19 \quad .$$

2. مثال

که $f(x)=\frac{x^3-1}{x-1}$ وي ،دا تابع په $x=1$ کې د تعریف وړ نه ده او د "$\frac{0}{0}$" مبهم شکل غوره کوي. دلته هر سړی دا حق لري چې **x** ته یوه ته نږدې او لا نږدې قیمتونه ورکړي او هیڅکله د $x=1$ قیمت نه شو ورکولی. نو که د x دا ډول قیمتونه د یو جدول په شکل ترتیب شي، لیدل کیږي چې $f(x)$ د 1.5 په لور نږدې کیږي.او داسې ئې لیکو:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = 1.5 \ .$$

چې محاسبه یې په لاندې ډول تر سره کیږي:

$$\frac{x^3-1}{x^2-1} = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x^2+x+1}{x+1} \ ; x \neq 1.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1} \frac{x^3-1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x+1} = \frac{3}{2} \ .$$

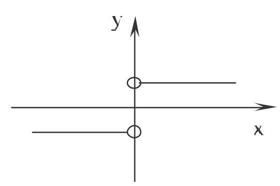
3. مثال

د $f(x)=\frac{x}{|x|}$ تابع په نظر کې نیسو . د $f(x)$ هغه حالت مطالعه کوو چې په هغه کې x د صفر په لور نږدې کیږي .

حل

د f تابع د هر $x\neq 0$ له پاره په لاندې ډول لیکلی شو :

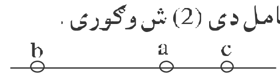
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} = 1 \ ; x > 0 \\ \frac{x}{|x|} = -1 \ ; x < 0 \end{cases}$$



(1)ش

د شکل له مخې معلومیږي، چې کله که**x** د صفر په لور نږدې کیږي، د $f(x)$ تابع یوه مشخص او معلوم عدد ته نه نږدې کیږي. یعنې که $x > 0$ او صفر ته نږدې کیږي $f(x) \to 1$ او که $x < 0$ او صفر ته نږدې شي $f(x) \to -1$ کیږي . په عادي ژبه دلیمېټ د مفهوم په اړه داسې وایو چې :

د f تابع او د a یو ثابت عدد په نظر کې نیسو. فرضوو چې د a یو حذف شوی مجاورت $(b,c)=(b,a)\cup(a,c)$ د f تابع د تعریف په ساحه کې شامل دی (2) ش وګورئ .

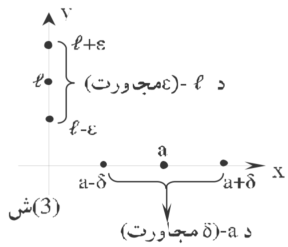


(2)ش

که د (ℓ) یوعدد موجود وي داسې چې x د ښۍ او کیڼې خوا څخه a ته نږدې شي، په دې صورت کې که $f(x)$ د (ℓ) عدد ته نږدې کیږي ، نو (ℓ) ته د f تابع لیمېټ ویل کیږي. او داسې ئې لیکو:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \ell$$

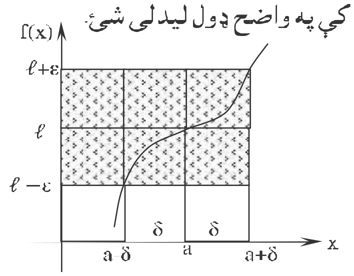
د پورتنیو مثالونوڅخه معلومیږي چې x د a په مجاورت او f د ℓ په مجاورت کې مطالعه شوي دی. یعنې په ریاضیاتو کې دلیمېټ د تعریف له پاره هر مجاورت استعمال کیدلی شي، خو متناظر مجاورت زیات د استعمال وړ دی.



(3)ش

1.4 تعریف (د لیمېټ تخیلي (دقیق) تعریف)

که f یوه تابع وي ،چې د a په یو حذف شوي انترول (b,c) کې تعریف شوي وي او د ℓ عدد هم موجود وي ،چې د هر مثبت عدد ε (که ε هرڅومره کوچنی هم وي) له پاره یو د δ مثبت عدد داسې موجود وي ،چې د $|x-a| < \delta$ له پاره $|f(x)-\ell| < \varepsilon$ صدق وکړي. په دې صورت کې وایو چې. $\lim_{x\to a} f(x) = \ell$ دی .دا مفهوم په (4) شکل کې په واضح ډول لیدلی شئ.



(4)ش

پاتې دې نه وي چې د تابع له پاره دیوطرفه لیمېټ مفهوم هم باید روښانه شي او د هغې په اړه داسې وایو .

یو طرفه لیمېټ

که (a,b) د f تابع په دومین کې شامل وي، کله چې x د ښي خوا څخه a ته نږدې کیږي ، په دې صورت کې که f د ℓ یو معلوم عدد ته نږدې شي ، نو ℓ ته د f تابع د ښی خوا لیمېټ ویل کیږي .
داسې یې لیکو :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \ell$$

اوکه (c,a) د f تابع په دومین کې شامل وي ، کله چې xد کیڼې خوا څخه a ته نږدې کیږي ، په دې صورت کې که f د ℓ عدد ته نږدې شي،نو ℓ ته د f تابع د چپ خوالیمېټ ویل کیږي .داسې یې لیکو:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

لکه چې په 3. مثال کې مو ولیدل چې:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{x}{|x|} = 1 \qquad ; \qquad \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{|x|} = -1 \qquad .$$

دا هم زیاتوو چې که دیوې تابع د ښی خوا او کیڼې خوا لیمېټونه دواړه موجود او سره مساوي وي ، نو د تابع لیمېټ هم موجود دی. یعنې:

$$\lim_{x\to a^-} lim f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) \quad .$$

که د تابع د ښی او کیڼې خوا لیمېټونه موجود او سره مساوي نه وي ، په دې صورت کې لیمېټ وجود نه لري. یعنې که $\lim_{x\to a^-} lim f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$ وي ،نو$\lim_{x\to a} f(x)$ نه دی موجود . د مثال په توګه د3. مثال لیمېټ پهx=0 کې وجود نه لري .

4. مثال

د لیمېټ د دقیق تعریف له مخې ثابت کړی چې $\lim_{x\to 2}(3x+5) = 11$ دی.دلته a=2 او ℓ=11 دی .فرضوو چې دε عدد راکړل شوی دی. باید دδ یو مثبت عدددا سې په لاس راوړو چې د $|x-2| < \delta$په صورت کې $|(3x+5)-11| < \varepsilon$ صدق وکړي.
ددې مطلب له پاره دδ عدد په لاس راوړو:

$$|(3x+5)-11| < \varepsilon$$
$$\Rightarrow |3x-6| < \varepsilon \Rightarrow 3|x-2| < \varepsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\varepsilon}{3} .$$

که $\delta =: \frac{\varepsilon}{3}$ انتخاب شي، $|x-2| < \frac{\varepsilon}{3} = \delta$ په لاس راځي. د مثال په توګه که $\varepsilon = 1$ وي، $\delta = \frac{1}{3}$ دی. که $\varepsilon = 0.3$ شي $\delta = \frac{0.3}{3} = 0.1$ کیږي.

5. مثال

وښیئ چې $\lim_{x\to 3} x^2 = 9$ دی.

حل

$|x^2-9| = |x-3||x+3| < 7|x-3| \Rightarrow 7|x-3| < \varepsilon \Rightarrow \delta := \frac{\varepsilon}{7}$

په دې حالت کې

$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists\delta_\varepsilon = \frac{\varepsilon}{7}\,;\ |x-3| < \delta \Rightarrow |x^2-9| < \varepsilon$

صدق کوي.

6. مثال

وښییٔ چې $\lim\limits_{x\to1} \frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1} = -8$ دی.

حل

$$\left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}+8\right| < \varepsilon\,.$$
$$\left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}+8\right| = \left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3+8x-8}{x-1}\right|.$$
$$\left|\frac{(x-1)^2(2x^2-2x-5)}{x-1}\right| = |(x-1)(2x^2-2x-5)|\ .$$
$$< \delta(|2x^2| + |2x+5| < \delta(2\cdot 4+2\cdot 2+5) = 17\delta = \varepsilon \Rightarrow \delta = \frac{\varepsilon}{17}\ .$$

یعنې که $\delta = \frac{\varepsilon}{17} > |x-1|$ انتخاب شي، په دې صورت کې

$$\left|\frac{2x^4-6x^3+x^2+3}{x-1}-(-8)\right| < \varepsilon$$

صدق کوي .

1.4 دعوی

که د $\mathbf{f}$ په یوه تابع کې $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود وي نو دا یوازینی دی.

ثبوت

فرضوو چې د f تابع په $\mathbf{a}$ کې د A او B دوه مختلف لیمېټونه لري. یعنې

$$\lim_{x\to a} f(x) = B \ \wedge\ \lim_{x\to a} f(x) = A$$

دی. د فرضیې له مخې لرو چې :

$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}\,.$$
$$|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}.$$
$$\Rightarrow |A-B| = |A-f(x)+f(x)-B| < |A-f(x)|+|f(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ .$$

څرنګه چې $\forall\varepsilon > 0$ له پاره $|A-B| < \varepsilon$ کیږي نو $A=B$ کیږي . ■

2.4 دعوی

که د f او g توابعو له پاره $\lim_{x\to a} f(x) = A$ او $\lim_{x\to a} g(x) = B$ وي. نو

(a $\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = A + B$.

(b $\lim_{x\to a}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = A\cdot B$.

(c $\lim_{x\to a}\frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}\ ; B \neq 0$.

(d $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}\ ;\ B \neq 0$.

ثبوت

a) باید وښیو چې

$$|x-a| < \delta \quad \Rightarrow |f(x)+g(x)-(A+B)| < \varepsilon \ .$$

صدق کوي. د فرضیې له مخې لرو چې

(i $|x-a| < \delta_1 \Rightarrow |f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2}$.

(ii $|x-a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$$\overset{(i),(ii)}{\Longrightarrow} \big|\big(f(x)+g(x)\big)-(A+B)\big| = |(f(x)-A+(g(x)-B)|$$
$$\le |f(x)-A| + |g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ .$$

یعنې که $|x-a| < \delta$; $\delta := \min(\delta_1,\delta_2)$ انتخاب شي ، نود

$$|(f(x)+g(x))-(A+B)| < \varepsilon$$

افاده د هر ε له پاره صدق کوي.

(b

$$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| = |f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot B + f(x)\cdot B - A\cdot B| \ .$$
$$= |f(x)(g(x)-B) + B(f(x)-A)| \ .$$
$$\le |f(x)(g(x)-B)| + (|B|+1)|f(x)-A| \quad \ldots. \qquad \text{(iii}$$

څرنګه چې $\lim_{x\to a} f(x) = A$ دی ، نویو δ موجود دی د اسې چې $|f(x)-A| < 1$ صدق کوي. یعنې

$$A-1 < f(x) < A+1 \ .$$

دپورتنی رابطې څخه معلومیږي چې د f تابع یوه محدوده تابع ده. یعنې د c یو مثبت عدد موجود دی چې

$$|f(x)| < c.$$

همدارنګه د $\lim_{x\to a} g(x) = B$ له پاره دهر $\varepsilon > 0$ په مقابل کې یو د δ_2 موجود دی چې که $|x-a| < \delta_2$ شي نو $|g(x)-B| < \frac{\varepsilon}{2C}$ صدق کوي.

د پورته په شان د $\lim_{x\to a} f(x)=A$ له پاره د هر $\varepsilon > 0$ په مقابل کې یو $\delta_3 > 0$ موجود دی چې که $|x-a| < \delta_3$ شي نو $|f(x)-A| < \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$ صدق کوي.

که دا ټول غیر مساوات په (iii) رابطه کې وضع کړو لرو چې :

$$|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| \le |f(x)|\cdot|g(x)-B| + (|B|+1)\cdot|f(x)-A|$$

$\le \ c \cdot \frac{\varepsilon}{2c} + 2(|B|+1) \cdot \frac{\varepsilon}{2(|B|+1)}$.
$= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$.

نو که $\delta := \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$ وي ، د $|x-a| < \delta$ له پاره د $|f(x)\cdot g(x) - A\cdot B| < \varepsilon$ رابطه تل صدق کوي. ■ [33]

7. مثال

i) $\lim_{x\to 3}(2x^2+6x+2)$ پیدا کړی. (کورنی دنده) .

ii) $\lim_{x\to 3}\frac{(x+1)(3x-1)}{x^2+3x-2}$ پیدا کړی. (کورنی دنده) .

iii) $\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x+3}$ پیدا کړی. (کورنی دنده) .

3.4 دعوی

که f, g او h درې تابع ګانې وي داسې چې $f(x) \le h(x) \le g(x)$ او $\lim_{x\to a} f(x) =$ $\lim_{x\to a} g(x) = A$ وي، نو $\lim_{x\to a} h(x) = A$.

ثبوت

باید وښیو چې د $\forall\varepsilon > 0$ له پاره یو $\delta > 0$ موجود دی چې که $|x-a| < \delta$ شي ، نو $|h(x) - A| < \varepsilon$ کیږي. لرو چې :

$|h(x) - A| = |h(x) - f(x) + f(x) - A|$.
$\le |h(x) - f(x)| + |f(x) - A|$.
$\le |g(x) - f(x)| + |f(x) - A|$.

څرنګه چې $\lim_{x\to a}(g(x) - f(x)) = 0$ دی. نو

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_1 > 0 \ ; \ |x-a| < \delta_1 \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

$\forall\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta_2 > 0 \ ; \ |x-a| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0 \ \exists\, \delta := \min(\delta_1, \delta_2) \ ; \ |x-a| < \delta \ \Rightarrow$

$|h(x) - A| \le |g(x) - f(x)| + |f(x) - A| \le \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \epsilon$ ■ [33]

یادونه

د $x \to \infty$ په صورت کې هم د f تابع د وضعیت مطالعه کول ضرور دي . په دې حالت کې د یوې تابع لیمېټ په لاندې ډول تعریف کوو.

2.4 تعریف (لیمېټ په بې نهایت کې)

که د $\forall\varepsilon > 0$ له پاره اقلاً یو $k > 0$ موجود وي چې د $\forall x \in (k, \infty)$ له پاره $|f(x) - A| < \varepsilon$ صدق وکړي، وایو چې A په بې نهایت(∞) کې د f تابع لیمېټ دی. یعنې $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

همدارنګه $\lim_{x \to -\infty} f(x) = A$ دی، که د$0 < \varepsilon \forall$ له پاره اقلاً یو $k > 0$ موجود وي چې
$\forall x \in (-\infty, k)$ له پاره د $|f(x) - A| < \varepsilon$ رابطه صدق وکړي.

4.4 دعوی

د $\forall p > 0$ له پاره $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^p} = 0$ دی.

ثبوت

باید وښیو چې $\left|\frac{1}{x^p}\right| < \varepsilon$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k > 0 \quad \forall x \in (k, \infty)$ صدق کوي .

لرو چې:

$$\left|\frac{1}{x^p}\right| < \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{x^p} < \varepsilon \quad ; \quad x , p > 0 .$$

$$\Rightarrow x^p > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}} \quad .$$

نو که $k \geq \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$ انتخاب کړو، د $x > k$ له پا ره $\left|\frac{1}{x^p}\right| = \frac{1}{x^p} < \varepsilon$ صدق کوي اود $p=1$ په صورت کې
$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$ په لاس راځي ■ [33]

د لیمېټ تعریف د یوې تابع د لیمېټ د پیدا کولو له پاره کومه ځانګړي طریقه نه راښئي، خو د
هغه دعواوپه کومک چې تر اوسه پورې مو د لیمېټ له پاره ثبوت کړي دي ،کولی شو چې د یوې
تابع لیمېټ په لاس راوړو.

نوټ

په عمومي ډول سره که $f(x)=a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0; \ a_n \neq 0$ او $a_n > 0$ وي، لرو
چې:

(i

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

(ii که n طاق وي :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

5.4 دعوی

که f او g په ترتیب سره n -ام او m -ام درجه پولینومونه وي ، نو:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m} \ .$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{a_n x^n}{a_m x^m} \ .$$

ثبوت

ثبوت ئې واضح دی. د مثالونو په حل کې به د ثبوت په مفهوم باندې پوه شئ. ■

8. مثال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+12x^2-16x}{5x^5+x^3-5x^2} = \lim_{x\to\infty} = \frac{\frac{2x^4}{x^5}+\frac{12x^2}{x^5}-\frac{-16x}{x^5}}{5+\frac{x^3}{x^5}-\frac{5x^2}{x^5}} .$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}+\frac{12}{x^3}-\frac{16}{x^4}}{5+\frac{1}{x^2}-\frac{5}{x^3}} .$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2}{x}}{5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{5x} = 0$$

یعنې

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4+12x^2-16x}{5x^5+x^3-5x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^4}{5x^5} = \lim_{x\to\infty}\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x} = \frac{2}{5}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = \frac{2}{5}\cdot 0 = 0$$

9. مثال

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{6x^2+x}}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2(6+\frac{x}{x^2})}}{x} .$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\sqrt{6+\frac{1}{x}}}{x}$$

$$= \sqrt{\left(6+\frac{1}{x}\right)} = \sqrt{6} .$$

10. مثال

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+x)}-x)= \lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+x)}-x)\,\frac{\sqrt{x^2+x}+x}{\sqrt{x^2+x}+x}) .$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{\sqrt{x^2+x}+x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} .$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x\sqrt{(1+\frac{1}{x})}+1} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}(\sqrt{(x^2+x)}-x) = \frac{1}{2} .$$

11. مثال

i) که $f(x) = \frac{|x-3|}{x-3}$ وي، ایا $\lim_{x\to 3} f(x)$ موجود دی؟ وئې و ښیئ.

ii) که $f(x)=\begin{cases} x^2+2\,; x\ge 0 \\ 2x-3\,;\ x<0\end{cases}$ وي ، $\lim_{x\to 0} f(x)$ پیدا کړی.

iii) که $g(x) = \frac{1+2^{\frac{1}{x}}}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ وي، $\lim_{x\to\infty} g(x)$ پیدا کړی.

iv) که $f(x)=\frac{1}{3+2^{\frac{1}{x}}}$ وي، ایا $\lim_{x\to\infty} f(x)$ موجود دی ؟

کومک $\propto := \frac{1}{x}$ وضع کړی او د $x\to\infty$ په صورت کې $\propto\to 0$ کیږي.

پورتني سوالونه د کورنۍ دندې په توګه پاتې شول.

6.4 دعوی

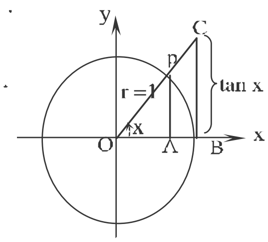
ثبوت کړی چې $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ کيږي .

ثبوت

د (5) ش له مخې ليکو چې :

$Op = r = 1$, $\sin x = AP$, $\cos x = OA$, $\tan x = BC$.

$$Area(OAP^{\Delta}) = \frac{1}{2}\cdot OA\cdot AP = \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x .$$



(5)ش

دOBP د قطاع مساحت له پاره په هغه صورت کې چې د x زاويه ډيره کوچنۍ وي، لرو چې $Area(OBP)=\frac{1}{2}x$ دي . همدارنګه د(5)ش له مخې لرو چې :

$$Area(OBC^{\Delta})=\frac{1}{2}OB\cdot BC=\frac{1}{2}\tan x \quad .$$

او

$$Area(OAP^{\Delta}) < Area(\overset{\Delta}{OBP}) < Area(OBC^{\Delta}) .$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\sin x\cdot\cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\tan x .$$

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} .$$

ځرنګه چې $\lim\limits_{x\to0}\cos x = \lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\cos x}=1$ دی او د3.4 دعوې له مخې

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

کيږي . ■

12. مثال

د(5) ش له مخې په ښکاره معلوميږي چې : $\lim\limits_{x\to0}\cos x = 1$ دی.

13. مثال

$$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos^2x}{x(1+\cos x)} \qquad (i$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin^2x}{x(1+\cos x)}=\lim_{x\to0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\sin x}{1+\cos x}\right)=1\cdot0=0.$$

$$\lim_{y\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=\lim_{y\to0}\frac{\sin y}{y}=1 \qquad (y:=3x) \qquad (ii$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{7x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\frac{7}{6}\cdot 6x}=\frac{6}{7}\lim_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{6x}=\frac{6}{7}.1=\frac{6}{7} \qquad \text{(iii}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{5x\,\frac{\sin 5x}{5x}}{3x\,\frac{\sin 3x}{3x}}=\lim_{x\to 0}\frac{5x}{3x}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3} \qquad \text{(iv}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=1\cdot 1=1 \qquad \text{(v}$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sin\pi x}{x+1}=\lim_{y\to 0}\frac{\sin(\pi(y-1))}{y} \qquad \text{(vi}$$

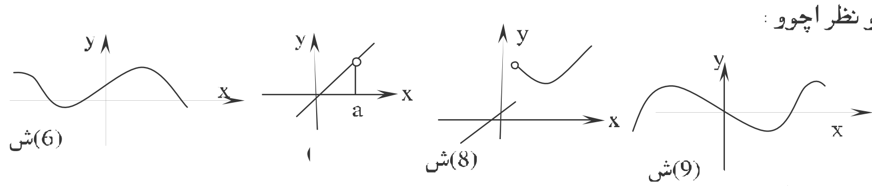
$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\sin\pi y}{y}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{-\pi\sin\pi y}{\pi y}=-\pi.1=-\pi$$

دلته($y:=x+1\Rightarrow x=y-1;\ x\to -1;\ y\to 0;\ \sin(\pi(y-1))=-\sin\pi y$) وضع شويدي.

2. د تابع ګانو متماديت

ددې له پاره چې د توابعو په متماديت(Continuity) باندې ښه پوه شوي وو، لاندينيو ګرافونو ته يو نظر اچوو :



(6)ش (8)ش (9)ش

پورتني شکلونه د تابع ګانو د ګرافونو څخه نمايندګي کوي چې په هغې کې متمادي او غير متمادي تابع ګانې په ښکاره ليدل کيږي. (7) ش ديوې غير متمادي تابع ګراف دی چې د x=a په قيمت کې يوه خاليګاه لري. (6) ش او (9)ش د متمادي تابع ګانو ګرافونه او (8)ش برسېره پر خاليګاه ددوو ټوټو څخه جوړ شوی دی او د يوې غير متمادي تابع ګراف دی. يعنې د متمادي تابع ګانو ګرافونه داسې شکلونه دي چې د تعريف په ساحه کې خاليګاه او جدائي نه لري. داسې ئې تعريف کوو :

3.4 تعريف

د f تابع ته په $a\in D(f)$ کې متمادي (متصله) (continuity) ويل کيږي چې :

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0;\ \ |x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon .$$

صدق وکړي.

14. مثال

وښئی چې د $f(x)=x$ تابع د $x=a$ په هره نقطه کې متمادي ده.یعنې لاندې رابطه صدق کوي .

$\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ ;\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| < \varepsilon\ .$

که $\varepsilon = \delta$ انتخاب شي ،لرو چې :

$|f(x)-f(a)| = |x-a| < \delta = \varepsilon\ .$

یعنې $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists\delta > 0\ \ ;\ |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(a)| = |x-a| < \varepsilon\ .$ صدق کوي.

15. مثال

ایا د $f(x)=x^2$ تابع په $x=2$ کې متمادي ده.؟

ځواب : هو. ځکه چې:

$$|f(x)-f(2)| = |x^2-4| = |x-2||x+2|$$

$$\leq 5|x-2| < 5\delta < \varepsilon \Rightarrow \delta < \frac{\varepsilon}{5}\ .$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \frac{\varepsilon}{5}\ \ ;\ \ |x-2| < \delta \Rightarrow |f(x)-f(2)| < \varepsilon\ .$$

د تابع د متمادیت شرطونه د $x=a$ په نقطه کې

د تابع متمادیت د $x=a$ په نقطه کې د لاندې دریو شرطونو په درلودلو سره هم صدق کوي :

$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ (i

$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ (ii

$a\in D(f)$ (iii

که د پورتنیو درو شرطونو څخه اقلاً یو هم صدق ونه کړي ، نو تابع په $x=a$ کې غیر متمادي ده.

16. مثال

د $f(x)=\frac{x^2+5}{x+2}$ تابع راکړل شوي ده .ایا د f تابع په $x=-2$ کې متمادي ده ؟

حل

دا چې $x=-2\notin D(f)$ دی، نو د f تابع په $x=-2$ کې متمادي نه ده.ایا پورتنی تابع په $x=2$ کې متمادي ده.؟ . ځواب : هو .ځکه چې

i) $2\in D(f)$

ii) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = f(2) = \frac{9}{4}$

$\Leftarrow$ د f تابع په $x=2$ کې متمادي ده.

17. مثال

ایا د $f(x)=\frac{1}{x}$ تابع په x=0 کې متمادي ده.؟

ځرنګه چې $0\notin D(f)$ دی او د متمادیت (iii) شرط صدق نه کوي، نو راکړل شوي تابع په x=0 کې متمادي نه ده.

18. مثال

ایا د $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & ; x\neq 0\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ تابع په x=0 کې متمادي ده ؟

حل

دلته سره له دې چې $0\in D(f)$ دی او د متمادیت دوهم شرط، صدق نه کوي .یعنې $\lim_{x\to 0} f(x)\neq f(0)$ دی. بنا پر دې د f تابع په x=0 کې متمادي نه ده .

19. مثال

د $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & ; x>0\\ 1 & ; x=0\\ x+1 & ; x<0\end{cases}$ تابع متمادیت په x=0 کې مطالعه کړو :

حل

ښکاره ده چې x=0 د تعریف په ساحه کې شامل او f(0)=1 کیږي. همدارنګه

$$\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x}{x}=1\ .$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}(x+1)=1\ .$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} f(x)=f(0)=1\ .$$

⇐د f تابع په x=0 کې متمادي ده.

20. مثال (حل ئې د کورنۍ دندې په توګه پرېښودل شو)

i) ایا د $f(x)=\begin{cases}x^2+5 ; x\geq 5\\ x^2-5 ; x<5\end{cases}$ تابع په x=5 کې متمادي ده ؟

ii) ایا د $g(x)=\begin{cases}\frac{x^3+27}{x+3} ; x\neq -3\\ 27\end{cases}$ تابع په x= -3 کې متمادي ده ؟

7.4 دعوی

که f او g په x=a کې متمادي تابع ګانې وي ، نو f+g ، f·g هم په x=a کې متمادي دي. برسېره پر دې که g(a)≠ 0 وي، نو $\frac{f}{g}$ هم په x=a کې متمادي ده.

ثبوت $\lim_{x\to a}(f+g)(x) \lim_{x\to a} = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x) = f(a) + g(a)$
$=(f+g)(a)$.

⇐ f+g په a کې متمادي دي. ■

څرنګه چې f(x)=x يوه متمادي تابع ده.همدارنګه هره ثابته تابع g(x)=c هم متمادي ده.نو ويلی شو چې هر پولينوم يوه متمادي تابع ده. همدارنګه هره ناطقه تابع په ټولو هغونقطو کې، چې په هغې کې مخرج د صفر خلاف کيږي متمادي ده.

8.4 دعوی

که f يوه متمادي تابع او g يوه بله تابع وي ،داسې چې $\lim_{x\to a} g(x)$ موجود وي. که دا ليمېټ د f په دومين کې شامل او د a په يو مجاورت کې د هر x له پاره g(x) هم په D(f) کې شامل وي ، نو
$$\lim_{x\to a} f(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)).$$

ثبوت

فرضوو چې $\lim_{x\to a} g(x) = b$ او $b\in D(f)$ دی. څرنګه چې f متمادي ده ، نو

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta_1 > 0;\ |g(x) - b| < \delta_1 \Rightarrow \left|f(g(x)) - f(b)\right| < \varepsilon\ .$$

همدارنګه $\lim_{x\to a} g(x) = b$ دی، نو

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\delta_1 > 0\ ;\ |x - a| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - b| < \varepsilon\ .$$

$$\Rightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ ;\ |x - a| < \delta \Rightarrow |f(g(x)) - f(b)| < \varepsilon.\ (\delta := \min(\delta_1, \delta_2)$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f(b)\ .$$

يا

$$\lim_{x\to a} f\left(g(x)\right) = f\,(\lim_{x\to a} g(x)) = f(b)\ \cdot ■$$

21. مثال

$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}$ پيدا کړی

حل

$$g(x):=\frac{\sin x}{x}\ ;\ f(x)=\sqrt[3]{x}$$

دلته f متمادي ، $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ موجود او په D(f) کې شامل دی ، نو د **8.4** دعوې له مخې ليکو چې :

$$\lim_{x\to 0}\sqrt[3]{\frac{\sin x}{x}}=\sqrt[3]{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}}=\sqrt[3]{1}=1\ .$$

9.4 دعوی

که **f** او **g** دوې تابع وي داسې چې g په a اوf په g(a) کې متمادي وي ،نو f o g هم په a کې متمادي دی .

ثبوت

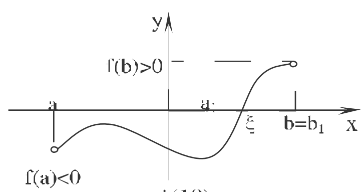
که په 8.4 دعوی کې د $\lim_{x\to a} g(x)$ پر ځای g(a) وضع کړو، نو لرو چې

$$\lim_{x\to a} f(g(x))=f(\lim_{x\to a} g(x))=f(g(a))$$

⇐ f o g متمادي دی.■

10.4 دعوی "Bolzano[5]"

که چېرې دf تابع د [a, b] په انترول کې تعريف او متمادي وي ، دا سې چې f(a) او f(b) د مختلفو اشارو لرونکي وي. په دې صورت کې اقلاً يو ξ د a او b تر منځ ((ξ ∈ (a, b) موجود دی چې $f(\xi)=0$ کيږي. (10) ش وګوری :



(10)ش

ثبوت

فرضوو چې f(a) <0 او f(b)> 0 دی. اوس که چېرې د I=[a, b]انترول نيم کړو نيمائي نقطه يې $c=\frac{a+b}{2}$ کيږي.که f(c)=0 وي ، نو ξ = c مطلوبه نقطه ده او ثبوت تکميل کيږي. که f(c)≠ 0 وي. په دې صورت کې f(x) اقلاً د $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ يا $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ په يو انترول کې د مختلفو اشارو لرونکي دی ، يعنې د انترول په يو انجام کې مثبت او په بل انجام کې منفي اشاره لري. که دا انترول $I_1=[a_1,b_1]$ و بولو ، نو $I_1=[a_1,b_1]$ په I=[a, b] **کې شامل** $f(b_1)>0$ او $f(a_1)<0$ دی.که د دوهم ځل له پاره د $[a_1,b_1]$ انترول نيم کړواو که فرضا f(x) په وسطي نقطه کې صفر

---

[5] Bolzano (1781-1848) يو هنګري رياضي دان دی.

شي، ثبوت تکمیل دی او که نه د پورته په شان باید I په یوله نیمائي شویو انترولونو کې پروت وي ،چې د انترول په انجامونو کې تابع د مختلفو اشارو لرونکي ده،او که دا انترول $I_2 = [a_2, b_2]$ وبولو ،په هغې کې $f(b_2) > 0$ او $f(a_2) < 0$ په لاس راځي .که دې عملیې ته n -ځلې دوام ورکړو د c_n د یوې نیمایي نقطې سره مخامخ کیږو چې $f(c_n) = 0$ په لاس راځي او ثبوت تکمیل کیږي. یا وایو چې د انترولونو د $I_1, I_2, I_3, \dots, I_n$ یو ترادف په لاس راځي ،داسې چې هر وروستی انترول په مخکیني انترول کې شامل دی ، چې د هغې څخه $f(a_n) < 0, f(b_n) > 0$ حاصلیږي. سربېره پردې د انترولونو اوږدوالی $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$ کیږي. دلته $\{b_n - a_n\}$ یو صفري ترادف دی .نو د ξ یو عدد شته چې د $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ مونوتون متزاید او $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ مونوتون متناقص ترادف هغې ته تقرب کوي. یعنې

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi \ .$$

د **f** تابع د متمادیت له امله لیکو چې :

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n) = f(\xi) \le 0 \ \wedge \ \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi) \ge 0$$
$$\Rightarrow f(\xi) = 0 : \xi\epsilon[a, b] \ .$$

ځکه چې د انترول په انجامو کې $f(b) \neq 0$, $f(a) \neq 0$.

د وسطي قېمت دعوی

د متمادي توابعو یو مهم خاصیت د وسطي قېمت دعوی ده، چې په عمل کې د توابعو د جذرونو ، د توابعو د قېمتونو په تخمین همدارنگه په انتیگرال او سلسلو کې ډېر زیات د استعمال ځایونه لري نو بهتره ده چې ښه پاملرنه ورته وشي .

11.4 دعوی(دوسطي قېمت دعوی)

که چېرې د f تابع متمادي اود $[a, b]$ انترول په انجامو کې د $f(a)=A$ او $f(b)=B$ دوه مختلف قېمتونه ولري ، په دې صورت کې د A او B تر منځ د C په هر قېمت سره یو $\xi \epsilon[a, b]$ شته ، داسې چې $f(\xi)=C$ کیږي .

ثبوت

فرض کوو چې $A < C < B$ دی. د φ یوه کومکي تابع د $[a, b]$ په انترول کې تعریف کوو:

$$\varphi(x) := f(x) - C$$

دا تابع د $[a, b]$ په انترول کې متمادي او په انجامونو کې د مختلفو اشارو لرونکې ده ، یعنې

$$\varphi(a) = f(a) - C = A - C < 0$$
$$\varphi(b) = f(b) - C = B - C > 0$$

د 10.4 دعوې له مخې یو ξ $(a < \xi < b)$ شته چې

$$\varphi(\xi) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(\xi) = f(\xi) - C = 0 \Rightarrow f(\xi) = C. \blacksquare \quad [33]$$

نوټ

دلته دتابع متمادیت په تړلي انترول کې لا زم دی. ځکه چې که دتابع ګراف په یوه نقطه کې متمادي نه وي، پرته له دې چې د صفر قېمت اختیارکړي، د مثبت څخه منفي ته تحول نه شي کولی.

د مثال په توګه د $f(x)=\lceil x \rceil - \frac{1}{2}$ **تابع د صفر قېمت نشي اخیستلی، سره له دې چې** $f(0) = -\frac{1}{2}$ او $f(1)=\frac{1}{2}$ دی.

پورتنی دعوی د معادلو د حل په پیدا کولو کې ډیرمهم رول لري . د مثال په توګه لاندینی دعوی بیانوو:

12.4 دعوی

د $f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_{n-2}x^{n-2} + \cdots + a_0$ $n\in \mathbb{N}, a_i\in\mathbb{R}$ **الجبري معادله چې درجه یې طاق ($n = (2k + 1)$) وي اقلاً د یو حقیقي حل لرونکی ده.**

''پرته له ثبوت'' ■

د مثال په توګه د $f(x)=x^5+2x^3-4x^2+x-1$ **تابع په نظر کې نیسو دلته** $f(1)= -1$ **او** $f(2)= 33$ **دي، نو یوه صفري نقطه د 1 او 2 ترمنځ شته چې په هغه کې د f تابع صفر کیږي.**

22. مثال

اد کورنی، دندې په توګه درته پاته شوا

i) **معلوم کړی چې د** $f(x)=x^5+4x^4-7x^3-9x^2-5x+7$ **تابع د** $[0,1]$ **په انتروال کې دصفری نقطې لرونکي ده.**

ii) **وښئی چې** $f(x)=x^4-x-1$ **تابع ،د 1 او 2 ترمنځ د یوې صفري نقطې لرونکي ده.**

3. مشتق

په منحني باندې د مماسي خط او د یوه متحرک جسم د سرعت موندل دواړه د لیمېټ په یو خاص **شکل** پورې اړه لري او د **لیمېټ** دغې **خاص شکل ته مشتق**(Dcrivatic) **ویل کیږي** ،چې په **انجنیري** او د ساینس په نورو څانګو کې ئې د سرعت د تحول په **شکل** هم تعبیر کولی شو .د مشتق **مفهوم** د پوهیدو په خاطر اول باید په دې پوه شو چې تزاید څه ته **ویل کیږي** ؟ . په دې اړه وایو ، چې د x **متحول** دΔx تزاید ، یو **تحول** دی چې د $x = x_0$ **قېمت څخه تر** $x = x_1$ پورې زیات اویا کمیږي. دلته $\Delta x := x - x_0$ دی ، یعنې $x_1 = x_0 + \Delta x$ کیږي .

که چېرې د x متحول د Δx تزايد د $x = x_0$ نقطې څخه راکړل شوی وي، په دې صورت کې وايو چې x د x_0 څخه تر $x_1 = x_0 + \Delta x$ پورې او د $y=f(x)$ تابع د $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ په اندازه د $y=f(x_0)$څخه تحول کړی دی. او د $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\text{د } y \text{ تحول}}{\text{د } x \text{ تحول}}$ نسبت ته د تابع متوسط قیمت د $x=x_0$او $x_1 = x_0 + \Delta x$ تر منځ، يعنې $(x_0 \ , \ x_0 + \Delta x)$ انترول تر منځ ويل کيږي. د مثال په توګه که چېرې د x متحول تزايد، د $x_0 = 1$ څخه د $\Delta x = 0.5$ په اندازه وي، د $y=f(x)=x^2 + 2x$ تابع تحول (تزايد) $\Delta y = f(1 + 0.5) - f(1) = 5.25 - 3 = 2.25$ دی او د تابع متوسط قیمت د $x=1$ او$x=1.5$ انترول تر منځ $4.5 = \frac{2.25}{0.5} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$کيږي.

4.4 تعريف

د $y=f(x)$ تابع مشتق نظر د x متحول ته ،د $x = x_0$ په نقطه کې داسې تعريف کوو :

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

په دې شرط چې پورتنی ليمېټ موجود وي.

23. مثال د $y=f(x)=x^2 + 3x$ تابع مشتق،د $x=x_0$ په نقطه کې د پورتني تعريف په اساس په لاندې توګه پیدا کوو :

$$y_0 = f(x_0) = x_0^2 + 3x_0$$

$$y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x) = (x_0 + \Delta x)^2 + 3(x_0 + \Delta x)$$

$$= x_0^2 + 2x_0.\Delta x + (\Delta x)^2 + 3x_0 + 3\Delta x$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = 2x_0\Delta x + 3\Delta x + (\Delta x)^2$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = 2x_0 + 3 + \Delta x.$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + 3 + \Delta x) = 2x_0 + 3 .$$

د $y=f(x)$ تابع مشتق چې د $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ څخه عبارت دی، معمولاً په $f'(x), y', D_x, , \frac{dy}{dx}, \frac{d}{dx}y$ یا په$\frac{d}{dx}f(x)$ سره ښودل کيږي.

5.4 تعريف

د f تابع ته $x=x_0$ په نقطه کې د اشتقاق وړ ويل کيږي ،که چېرې د f تابع مشتق د $x=x_0$ په نقطه کې وجود ولري. په همدې ترتيب هره د اشتقاق وړ تابع متمادي ده او برعکس يې صدق نه کوي. چې دا مفهوم به په راتلونکو مثالونو کې درته واضح شي.

24. مثال

د $8 - f(x)=x^2 + 5x$ له پاره د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ نسبت معلوم کړی.

a) په دې شرط چې x د $x_0 = 1$ څخه تر $x_1 = x_0 + \Delta x = 1.2$ پورې تحول وکړي.

b) په دې شرط چې x د $x_0 = 1$ څخه تر $x_1 = 0.8$ پورې تحول وکړي.

حل

$$\Delta x = x_1 - x_0 = 1.2 - 1 = 0.2 \qquad (a)$$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(1.2) - f(1) = -0.56 - (-2) = 1.44$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1.44}{0.2} = 7.2 \quad .$$

$$\Delta x = 0.8 - 1 = -0.2 \qquad (b)$$

$$\Delta y = f(0.8) - (1) = -3.36 — 2 = -1.36 \Rightarrow \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1.36}{-0.2} = 6.8 \ .$$

25. مثال

یو جسم د ازاد سقوط په حالت کې، د سکون له حالت څخه $S=4.9t^2$ متر فاصله د t په وخت کې طی کوي . د $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ قیمت پیدا کړی. په هغه صورت کې چې t د t_0 څخه تر $t_0 + \Delta t$ پورې تحول وکړي.

a) $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ معلوم کړی، په هغه صورت کې چې t د 3 څخه تر 3.5 پورې تحول وکړي.

b) $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ معلوم کړی ، په هغه صورت کې چې t د 3 څخه تر 3.2 پورې تحول وکړي.

حل

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{4.9(t_0+\Delta t)^2 - 4.9t_0^2}{\Delta t} = 9.8t_0 + 4.9\Delta t.$$

$$t_0 = 3 \,;\, \Delta t = 0.5 \ \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = 9.8 \cdot 3 + 4.9 \cdot 0.5 = 31.35 \frac{m}{sec} \qquad (a$$

$$t_0 = 3 \,;\, \Delta t = 0.2 \Rightarrow \frac{\Delta S}{\Delta t} = 9.8 \cdot 3 + 4.9 \cdot 0.2 = 30.35 \frac{m}{sec} \qquad (b$$

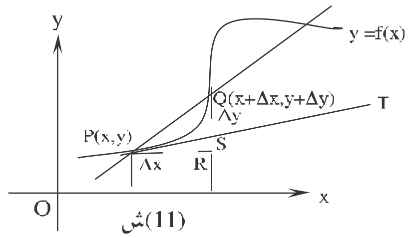
دلته $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ ته د جسم متوسط سرعت ،د وخت په یو انترول کې ویل کیږي.

د مشتق هندسي مفهوم

د (11) ش له مخې $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ د هغې مستقیم خط میل دی چې د $y=f(x)$ تابع د ګراف اختیاري نقطه $(Q(x+\Delta x , y + \Delta y))$ ،د ګراف د مستقرې نقطې $P(x,y)$ سره نښلوي.د $\Delta x \to 0$ په حالت کې P په خپل حال پاته کیږي او Q د منحني پر مخ د P په لور نږدې والی کوي. په دې صورت کې د PQ

خط د P په چاپیر لیمټي وضعیت ته ،چې هغه د PT خط څخه عبارت دی رسیږي. دلته د $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ لیمټي شکل ($\lim_{x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$) ته د $y=f(x)$ تابع ټانجنت (**slope**) د P په نقطه کې ویل کیږي او په $\frac{dy}{dx}$ سره ئې ښیو .

د مثال په توګه د $y=x^3-x^2-4$ تابع میل د $x=4$ په نقطه کې $m=40$ ، د $x=0$ په نقطه کې یې $m=0$ او د $x=-1$ په نقطه کې یې $m=5$ دی.



ش(11)

26. مثال

که $y=x^3-x^2-4$ وي، د $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$ قیمت پیدا کړی او دا هم وښیی چې که $\Delta x\to 0$ شي $\varepsilon\to 0$ کیږي.

حل

$$y+\Delta y=(x+\Delta x)^3-(x+\Delta x)^2-4.$$

$$\Delta y=(3x^2-2x)\Delta x+(3x-1)(\Delta x)^2+(\Delta x)^3\ .$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x^2-2x+(3x-1)\Delta x+(\Delta x)^2\ .$$

$$\frac{dy}{dx}=3x^2-2x.$$

$$\varepsilon=\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}\right)=\lfloor 3x^2-2x+(3x-1)\Delta x+(\Delta x)^2\rfloor-(3x^2-2x)\quad .$$

$$\Rightarrow \varepsilon=(3x\text{-}1+\Delta x)\Delta x\quad .$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}(3x-1+\Delta x)\Delta x=0\ \Rightarrow \varepsilon\to 0$$

مناقشه

په پورتني مثال کې د $\varepsilon=\frac{\Delta y}{\Delta x}-\frac{dy}{dx}$ له پاره لرو چې :

$$\varepsilon\cdot\Delta x dx=\Delta y\cdot dx-dy\cdot\Delta x\ .$$

$$\Delta y\cdot dx=\varepsilon\cdot\Delta x\cdot dx+dy\cdot\Delta x\ .$$

$$\Delta y = \varepsilon \cdot \Delta x + \frac{dy}{dx} \cdot \ \Delta x \ .$$

په (11) ش کې $SR = RQ - SQ = \Delta x \ \frac{dy}{dx}$ دی. یعنې

$$\frac{dy}{dx} \cdot \ \Delta x = PR \cdot \frac{SR}{PR} = SR \ .$$

$$\Rightarrow \varepsilon \cdot \Delta x = \Delta y - \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = RQ - SR = SQ.$$

که x د Δx په اندازه تحول وکړي، د y تحول د P نقطې څخه د Δy په اندازه دی او $\frac{dy}{dx} . \Delta x$، د y تحول د PT (ټانجنت) خط څخه راښیي. څرنګه چې $\varepsilon . \Delta x = \Delta y - \frac{dy}{dx} . \Delta x$ دی او $\varepsilon . \Delta x$ د Δx یو مضرب دی نو د $\Delta y - \frac{dy}{dx} . \Delta x$ تفاضل چې په SQ سره مساوي دی، نظر Δx ته ډېر ژر د صفر په لور نږدې کیږي او $\frac{dy}{dx} . \Delta x$ د Δy په عوض په تقریبي ډول استعمالولی شو، په هغه صورت کې چې $|\Delta x|$ ډېر کوچنی وي. یعنې د $\Delta y = \frac{dy}{dx} . \Delta x$ یا $\Delta y = \frac{dy}{dx} . dx$ $(\Delta y = y' \cdot dx)$ څخه په لاس راځي.

6.4 تعریف

د f یوه تابع په یو انټروال کې د اشتقاق وړ بلل کیږي ،که f د دې انټروال په هره نقطه کې د اشتقاق وړ وي.

د مشتق نیولو قاعدې

که u، v او w هره یوه نظر x ته د اشتقاق وړ تابع ، m او c ثابت عددونه وي. نو لاندې قوانین د تابع د مشتق نیولو له پاره تل صدق کوي.

(1 $$\frac{d}{dx}(c) = 0 \ \ .$$

(2 $$\frac{d}{dx}(x) = 1 \ .$$

(3 $$\frac{d}{dx}(u \cdot v) = (u) \cdot \frac{dv}{dx} + (v) \cdot \frac{du}{dx} \ \ .$$

(4 $$\frac{d}{dx}(c \cdot u) = c \frac{du}{dx} \ \ .$$

(5 $$\frac{d}{dx}(u + v + \cdots) = \frac{d}{dx}(u) + \frac{d}{dx}(v) + \cdots \ \ .$$

(6 $$\frac{d}{dx}(u \cdot v \cdot w) = u \cdot v \cdot \frac{dw}{dx} + u \cdot w \cdot \frac{dv}{dx} + v \cdot w \cdot \frac{du}{dx} \ .$$

(7 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{1}{c} . \frac{d}{dx}(u) \ ; c \neq 0.$$

(8 $$\frac{d}{dx}\left(\frac{c}{u}\right) = c \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{c}{u^2} \ \cdot \frac{du}{dx} \ ; u \neq \mathbf{0} \ \ .$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{v\frac{du}{dx}-u\frac{dv}{dx}}{v^2}\ ;v\neq 0\ . \qquad (9$$

$$\frac{dy}{dx}(x^m)=mx^{m-1}\ . \qquad (10$$

$$\frac{dy}{dx}(u^m)=mu^{m-1}.\frac{du}{dx}\ .\ [25] \qquad (11$$

12) د لوړې مرتبې مشتقات

که چېرې د $y=f(x)$ تابع نظر x ته د اشتقاق وړ وي، د هغې مشتق نظر x ته د اولې مرتبې د مشتق په نوم یادیږي. او که چېرې د اولې مرتبې د مشتق تابع نظر x ته د اشتقاق وړ وي، د f تابع مشتق نظر x ته د دوهمې مرتبې د مشتق په نوم یادوو چې هغه په y'' یا $f''(x)$ سره ښیو. په همدې ترتیب دریمه مرتبه مشتق په f''' یعنې $(\frac{d^3y}{dx^3})$ سره ښودل کیږي. دلته د پورتنیو مشتقاتو لاسته راوړنه د مشتق د تعریف له مخې په اسانی سره پیدا کیږي او د ثبوت څخه یې صرف نظر کوو.

4. د معکوسې ، مرکبې او غیر صریح تابع مشتق

a) د یوې تابع د معکوسې تابع مشتق

پو هیږو چې که f او g یو د بل معکوسې تابع وي په دې صورت کې د $g(f(x))=x$ او $f(g(y))=y$ رابطې تل صدق کوي. د مثال په توګه که $f(x)=x+1$ وي **معکوسه تابع یې** د $g(y)=y-1$ **څخه** عبارت دی. ځکه چې

$$g(y)=g(f(x))=x=f(x)-1=y-1\ .$$

همدارنګه پوهیږو چې هره تابع معکوس تابع نه لري. د مثال په توګه د $f(x)=x^2$ **له پاره که** $D(f)=\mathbb{R}$ وي ، **معکوسه تابع نه لري. نو که د f له پاره معکوسه تابع موجوده وي هغه په** f^{-1} او د f د اشتقاق وړ په صورت کې د معکوسې تابع مشتق په $(f^{-1})'$ سره ښیو . لرو چې :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}}\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{((f^{-1})(y))'}\quad ;\ f'(x)\neq 0\ ;f^{-1}(y)\neq 0$$

27. مثال

که $x=\sqrt{y}+5$ وي، $\frac{dy}{dx}$ **معلوم کړی**.

حل

پورتنی معادله د y له پاره حل کوو او بیا یې مشتق نیسو :

$$\sqrt{y}=x-5\Rightarrow y=(x-5)^2\Rightarrow\frac{dy}{dx}=2(x-5)\ .$$

داسې هم کولی شو چې د $x=\sqrt{y}+5$ **څخه** $\frac{dx}{dy}$ **پیدا کوو او بیا** $\frac{dy}{dx}$ **په لاس راوړو. یعنې**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} y^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = 2\sqrt{(x-5)^2} = 2(x-5) \ .$$

b) د مرکبې تابع مشتق

پوهیږو چې د f او g توابعو له پاره $f(g(x))$ ته مرکبه تابع ویل کیږي. که چیرې f او g د اشتقاق وړ وي، نو مرکبه تابع یې هم د اشتقاق وړ ده او مشتق یې په لاندې ډول دی :

د مثال په توګه که $f(x)=x^2+3$ او $g(x)=2x+1$ وي ، نو :

$$\frac{d}{dx}(f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$=2(g(x))\cdot 2 = 4(2x+1) = 8x+4$$

چې دلته $f'(x) = 2x$ او $g'(x) = 2$ دی.

یو بل فرمول چې د مرکبو توابعو د مشتق نیولو له پاره پکاریږي، په دې ډول دی:

د مثال په توګه که $y=f(u)$ او $u=g(x)$ وي نو د $\frac{dy}{dx}$ له پاره لرو چې:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \ .[19]$$

یعنې که $y=u^3$ او $u=4x^2-2x+5$ وي نو د $y=(4x^2-2x+5)^3$ د مشتق له پاره لرو چې

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = 3u^2 \cdot (8x-2) = 3(4x^2-2x+5)^2 \cdot (8x-2).$$

28. مثال

د $x=y^2-4y$ تابع له پاره ،د معکوسې تابع د منحنی میل د (0,0) او (0,4) په نقطو کې پیدا کړئ.

حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{2y-4} \ ; \ \frac{dy}{dx}|_{y=0} = -\frac{1}{4} \ ; \ \frac{dy}{dx}|_{y=4} = \frac{1}{4}$$

29. مثال

یوه نقطه د $y=x^3-3x+5$ په منحنی باندې حرکت کوي،داسې چې $x(t)=\frac{1}{2}\sqrt{t}+3$ او t د وخت څخه عبارت دی .که t=4 شي، د y تحول به څومره وي .

حل موږ د $\frac{dy}{dt}$ قیمت د t=4 په قیمت کې پیدا کوو :

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 3 \wedge \frac{dx}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{t}} \quad .$$

نو لیکو چې :

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = (3x^2-3) \cdot \frac{1}{4\sqrt{t}}$$

$$t=4 \ ; x=\frac{1}{2}\sqrt{4} + 3 = 1 + 3 = 4$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{1}{4\sqrt{4}}(3 \cdot 4^2 - 3) = \frac{1}{8}(45) = \frac{45}{8}$$

یعنې د y د تحول مقدار د وخت په یوه واحد کې $\frac{45}{8}$ واحده دی.

30. مثال

د مستوي یوه نقطه د $x=t^2+2t$ او د $y=2t^3-6t$ معادلو په اساس حرکت کوي.د $\frac{dy}{dx}$ قیمت د t=0, t=2 او t=5 له پاره پیدا کړی.

حل

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$\frac{dy}{dt} = 6t^2 - 6\ ;\ \frac{dx}{dt} = 2t + 2 \Rightarrow \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2t+2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = (6t^2 - 6)\left(\frac{1}{2t+2}\right) = 3(t-1)$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}|_{t=0} = 3(0-1) = -3\ .$$

$$\frac{dy}{dx}|_{t=2} = 3(2-1) = 3\ .$$

$$\frac{dy}{dt}|_{t=5} = 3(5-1) = 12.$$

31. مثال که چېرې $y=x^2-4x$ او $x=\sqrt{2t^2+1}$ وي، $\frac{dy}{dx}|_{t=\sqrt{2}}$ پیدا کړی.

[کورنۍ دنده]

c) دتابع غیر صریح شکل او د هغې مشتق

تر دې ځای پورې موتابع ګانې د x مستقل متحول له جنسه مطالعه کړلې. د مثال په توګه لکه

$$y=(x^2-1)^3 \quad ; \quad y = x^2 secx \quad ; \quad y = \begin{cases} x^2+1; x \le 0 \\ 1-x\ ; x > 0 \end{cases}$$

یا په عمومي ډول سره د y=f(x) شکلونه ، چې د توابعو صریح اوښکاره شکلونه دي، مطالعه کړل شول .اوس که y د x یوه تابع وي اوهغه د f(x,y)=0 په شکل لیکل شوي وي ، وایو چې د f(x,y)=0 معادله د y تابع له پاره د x له جنسه یو غیر صریح شکل دی. د مثال په توګه که y د x یوه تابع وي .د $3x^2-4y-2x+1=0$ معادله د y له پاره غیر صریح شکل دی . په دې ځای کې موږ غواړو چې د $\frac{dy}{dx}$ قیمت د y د غیرصریح شکل څخه په لاس راوړو .

د مثال په ډول د $(3x^3-4)$y-2x+1=0 په معادله کې د $\frac{dy}{dx}$ قیمت مطلوب دی. د $\frac{dy}{dx}$ د پیدا کولو یوه لار داده چې د پورتنۍ معادلې څخه د امکان په صورت کې ،اول د y قیمت پیدا کوو او وروسته له هغې د $\frac{dy}{dx}$ قیمت په لاس راوړو. یعنې:

$$y=\frac{2x-1}{3x^3-4} \Rightarrow y' = \frac{2\cdot(3x^3-4)-(9x^2)(2x-1)}{(3x^3-4)^2}$$

$$= -\frac{12x^3-9x^2+8}{(3x^3-4)^2} \quad .$$

دا هم ممکنه ده چې د $\frac{dy}{dx}$ موندلو له پاره ، پرته له دې چې د y قیمت د x له جنسه په نظر کې ونیسواو بیا $\frac{dy}{dx}$ په لاس راوړو .د یو بل میتود څخه کار اخلو چې هغې ته غیر صریح مشتقات (Implicit differentiation) ویل کیږي.[15]

د مثال په توګه بېر ته د $(3x^3-4)$y-2x+1=0 غیر صریح شکل ته مراجعه کوو .دلته د پورتنی معادلې د دواړو خواو مشتق نظر x (په یاد ولرئ چې y د x تابع ده) ته نیسو. .

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(3x^3y-4y-2x+1)=\frac{d}{dx}(0)$$

$$=(3x^3\cdot\frac{dy}{dx}+9x^2\cdot y)-4\cdot\frac{dy}{dx}-2=0$$

$$\Rightarrow (3x^3-4)\frac{dy}{dx}=2-9x^2y.$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{2-9x^2y}{3x^3-4} \ .$$

معلومیږي چې د $\frac{dy}{dx}$ وروستی قیمت ،د $\frac{dy}{dx}$ اولې قیمت سره توپیر لري او په حقیقت کې دوی دواړه سره مساوي دي. یعنې که د $\frac{dy}{dx}$ په وروستي قیمت کې $y:=\frac{2x-1}{3x^3-4}$ وضع شي د $\frac{dy}{dx}$ اولنی قیمت په لاس راځي.

32. مثال

د xy+x-2y-1=0 **څخه** $\frac{dy}{dx}$ **په** لاس راوړئ.

حل

$$\frac{dy}{dx}(xy+x-2y-1)=\frac{d}{dx}(0).$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(xy)+\frac{d}{dx}(x)+\frac{d}{dx}(-2y)+\frac{d}{dx}(-1)=\frac{d}{dx}(0).$$

$$\Rightarrow x\cdot\frac{dy}{dx}+y+1-2\cdot\frac{dy}{dx}=0 \ .$$

$$\Rightarrow (x-2)\frac{dy}{dx}=-1-y \ . \Rightarrow \frac{dy}{dx}=\frac{1+y}{2-x}$$

33. مثال

د $4x^2+9y^2-36=0$ افاده راکړل شویده ،$\frac{dy}{dx}$ پیدا کړئ.

حل

$\frac{dy}{dx}(4x^2+9y^2-36)=\frac{dy}{dx}(0).$

$8x+18y\cdot\frac{dy}{dx}=0$.

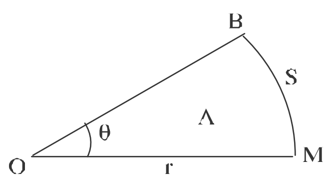
$\frac{dy}{dx}=-\frac{8x}{18y}$.

$\frac{dy}{dx}=-\frac{4x}{9y}$.

5. د مثلثاتي او معکوسو مثلثاتي توابعو مشتق

مخکې له دې چې د مثلثاتي توابعو په مشتقاتو پیل وکړو، لږ څه د ځینو مثلثاتي توابعو فرمولونوته کتنه کوو.

په اول حالت کې فرضوو چې د θ $(AOB^{\angle})$ زاویې واحد رادیان دی. په دې صورت کې د هغې د مقابل قوس اوږدوالی(S) د $S=r\cdot\theta$او د قطاع $(MOB^{\sphericalangle})$ مساحت کیږي.

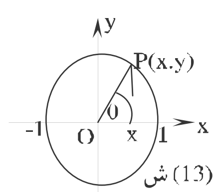


ش(12)

همدارنګه د زاویې د واحداتو یعنې د درجې او رادیان تر منځ، لاندې مناسبت موجود دی.

$1^o=\frac{\pi}{180}rad$; $\propto^o=\frac{\pi}{180}\cdot\propto rad.$

برسېره پردې که یوه مثلثاتي دایره په نظر کې ونیسو. (13) ش



ش (13)

لرو چې

$x=\cos\theta$; $y=\sin\theta$.

دلته د sin او cos توابعو دومین $\mathbb{R}$ او د قیمتونو ناحیې یې $-1\le y\le 1$ یعنې$[-1,1]$ دي.
همدارنګه پوهیږو چې:

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta}\ ; sec\theta = \frac{1}{cos\theta}\ ;\ (cos\theta \neq 0 \Rightarrow \theta \neq\ \pm\ \frac{2n-1}{2}\ \pi\ ; (n\ =\ 1,2,3, \dots))$$

a) د مثلثاتي توابعو مشتق

د مثلثاتي توابعو د مشتق فرمولونه

د مشتق تعریف د تطبیق څخه په مثلثاتي توابعو باندې ، لاندې فرمولونه په لاس راځي.

$\frac{d}{dx}(sinx) = cosx\ ;\ \frac{d}{dx}(cosx) = -sinx.$

$\frac{d}{dx}(tanx) = sec^2x\ ;\ \frac{d}{dx}(cotgx) = -\ csc^2x\ \ .$

$\frac{d}{dx}(secx) = secx \cdot tanx.$

$\frac{d}{dx}(cscx) =\ -cscx \cdot cotgx.$

د مثال په توګه ،که د مشتق تعریف د sin په تابع باندې تطبیق کړو، د هغې مشتق $y' = (cosx)$ په لاندې ډول پیدا کولی شو :

$y=sinx \Rightarrow y + \Delta y = sin(x + \Delta x)$.

$\Rightarrow \Delta y =\ sin(x + \Delta x) - sinx$.

$\Delta y = sinx \cdot cos\Delta x + cosx \cdot sin\Delta x - sinx$.

$=cosx \cdot sin\Delta x + sinx(cos\Delta x - 1)$.

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(cosx \cdot \frac{sin\Delta x}{\Delta x} + sinx \cdot \frac{cos\Delta x-1}{\Delta x})$.

$=cosx+sinx \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cos\Delta x-1}{\Delta x} =cosx+sinx \cdot 0 = \cos x$.

همدارنګه $\frac{d}{dx}(cosx) = -sinx$ او نور پاتې ټول فرمولونه دپورته په شان په لاس راځي.

b) د معکوسې مثلثاتي تابع مشتق

که چېرېx=siny وي ،د هغې معکوسه مثلثاتي تابع په (y=arc sinx) یاپه $y=sin^{-1}x$ سره ښودل کیږي. په دې ځای کې $D(arc\ sinx)=[-1,1]$ او Range یې د x=siny تابع د تعریف ناحیې هغه برخه ده چې په هغه کې د x=siny تابع مزاید یا متناقصه وي . یعنې د $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ څخه عبارت دئ. په همدې ترتیب د x=cosy له پاره معکوسه تابعy=arc cosx یا $(cos^{-1}x)$ دی،چې د

تعریف ناحیه یې د cos تابع د قېمتونو ناحیه ، او د قېمتو نو ناحیه یې د cos تابع د تعریف په ناحیه کې د تزاید یا تنقص برخه ده . په دې ډول سره نوره معکوسې مثلثاتي توابع هم تعریف کولی شو او مشتقات یې په لاندې ډول دي.

د معکوسو مثلثاتي توابعو د مشتق فرمولونه

$$\frac{d}{dx}(arc\,sinx) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (i$$

$$\frac{d}{dx}(arc\,cosx) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (ii$$

$$\frac{d}{dx}(arc\;\;tanx) = \frac{1}{1+x^2} \qquad (iii$$

$$\frac{d}{dx}(arc\;\;cotgx) = -\frac{1}{1+x^2} \qquad (iv$$

$$\frac{d}{dx}(arc\,secx) = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \qquad (v$$

د مثال په ډول(i) رابطه په لاندې توګه په لاس راوړو :

$$y = arc\,sinx \Rightarrow x = siny\ .$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(x) = 1 = \frac{d}{dx}(sin\,y) = \frac{d}{dy}(sin\,y)\cdot\frac{dy}{dx} \quad .$$

$$\Rightarrow 1 = cos\,y\cdot\frac{dy}{dx}\ .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{cosy} = \frac{1}{\sqrt{1-sin^2y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad .$$

$$\Rightarrow y = arc\,sinx \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

همدارنګه که (v) رابطه په نظر کې ونیسو په لاندې ډول سره د هغې مشتق پیدا کوو:

$$y=\text{arc secx} \Rightarrow x = sec\,y.$$

$$\frac{d}{dx}(x) = 1 = \frac{d}{dx}(secy) = \frac{d}{dy}(secy)\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$= \text{secy}\cdot tany\cdot\frac{dy}{dx} \quad .$$

$$= \text{secy}\cdot\sqrt{sec^2y-1}\cdot\frac{dy}{dx}\ .$$

$$\Rightarrow 1 = x\cdot\sqrt{x^2-1}\cdot\frac{dy}{dx}.$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \quad .$$

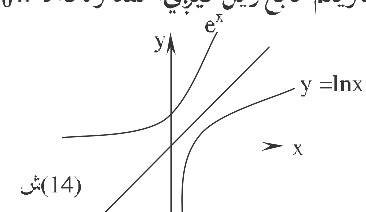
په همدې ترتیب سره د ټولو مثلثاتي معکوسو توابعو مشتق پیدا کولی شو.

6. د لوګارتمي او اکسپونسیال تابع ګانو مشتق

څرنګه چې د اکسپونسیال او لوګارتمي تابع ګانو څخه مو د مخه پوره معلومات تر لاسه کړي دي او دومره زیاتوو چې د دا ډول تابع ګانو تطبیقي ساحه په ورځني ژوند کي ډېره پراخه ده ، د مثال په توګه په انجنیري کې د رادیواکتیف موادو تشعشع ، په فزیک کې د اهتزازي حرکتونو ،د ژوندیو موجوداتو په تکثر او په ریاضیاتو کې د ځېنو مغلقو توابعو د مشتق پیدا کولو نومونه اخیستلی شواو ددې په اړه به نوراضافه معلومات ددې کتاب په وروستیو فصلونو کې وګورئ .

7.4 تعریف

فرضوو چې $a > 0$; $a \neq 1$ دی .نو که چېرې $a^y = x$ وي په دې صورت کې $y := \log_a x$ (داسې لوستل کیږي (لوګx په قاعده دa) ته لوګارتمي تابع ویل کیږي. که $\ln x := \log_e x$ قبول کړو، نو په دې صورت کې$\ln x$ ته دx دطبعي لوګاریتم تابع ویل کیږي. همدارنګه د $\log_{10} x$ په عوض په لنډه توګه $\log x$ هم لیکلی شو :



(14)ش

د لوګاریتمي او اکسپونسیال تابع ګانود مشتق فرمولونه

د لوګارتمي توابعو د مشتق فرمولونه په لاندې ډول دي

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = \frac{1}{x} \cdot \log_a e \;;\; a > 0 ; a \neq 1 \;. \qquad (i$$

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln a \quad ; \; a > 0 \,. \qquad (ii$$

$$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x} \;. \qquad (iii$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \;. \qquad (iv$$

چې د هر یو لاسته راوړنه د مشتق د تعریف له مخې په اسانی سره لاس ته راځي. همدارنګه که چېرې د $y=f(x)$ د اشتقاق وړ تابع ، چې د نورو توابعو د ضرب یا تقسیم د حاصل څخه جوړه شوي وي ، د هغې د مشتق اخیستل، د طبعي لوګاریتم د اخیستلو څخه وروسته،(چې د لوګاریتمي مشتقاتو په نوم یادیږي) په اسانی سره په لاندې توګه په لاس راوړو .

$y=f(x) \Rightarrow ln y = ln\, f(x)$.

$\frac{d}{dx}(ln y) = \frac{d}{dx}\left(ln\, f(x)\right)$.

$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \cdot \frac{d\, f(x)}{dx}$. [10]

او له دې ځای څخه کولی شو چې $\frac{dy}{dx}$ په اسانی سره پیدا کړو .

34. مثال

د $y=\log_a x$ تابع مشتق، د مشتق د تعریف له مخې پیدا کړی .

حل

$y=\log_a x \Rightarrow y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$.

$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)$.

$\Delta y = \log_a \frac{x+\Delta x}{x}$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x}\log_a(\frac{x+\Delta x}{x}) = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a(\frac{x+\Delta x}{x})$.

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}$

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} [\log_a(1 + \frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}}] = \frac{1}{x}\log_a e$.

$\Rightarrow y = \log_a x \Rightarrow y' = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x \cdot \ln a}$.

35. مثال

د لاندې توابعو مشتق پیدا کړی .

$\log_a(3x^2 - 5)$ (i

$y=a^x$ (ii

حل

$y = \log_a(3x^2 - 5)$ (i

$y' = \frac{6x}{3x^2-5} \cdot \log_a e = \frac{6x}{(3x^2-5)\ln a}$.

$y = a^x$ (ii

$\Rightarrow \ln y = \ln a^x = x \cdot \ln a$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}(\ln y) = \frac{d}{dx}(x \cdot \ln a)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y' = \ln a \Rightarrow y' = a^x \cdot \ln a \ . \quad [27]$$

36. مثال

د یوه کیمیاوي تعامل د بیلانس د تعادل ثابت (K)، دمطلقه حرارت (T)تابع دی ، چې د

$$K = K_0 \cdot e^{-\frac{1}{2}q[(T-T_0)/T_0T]}$$

په واسطه راکړل شوی دی ، q, K_0 او T_0 ثابت عددونه دي . د T د یوې درجې په تحول کې د K فیصدي په لاس راوړی

حل

د K تغیر په یوه واحد د وخت کې $\frac{dK}{dT}$ دی، فیصدي یې پیدا کوو:

$$\left.\begin{matrix} K & \frac{dK}{dt} \\ 100 & x \end{matrix}\right\} \Rightarrow x = \frac{100}{K} \cdot \frac{dK}{dt} \ .$$

$$\Rightarrow \frac{100}{K} \cdot \frac{dK}{dt} = 100 \cdot \frac{d}{dt}(lnk) \ldots \qquad (*)$$

$$\ln K = \ln K_0 - \frac{1}{2} q \cdot \frac{T-T_0}{TT_0} \ .$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dT}(lnK) = -\frac{q}{2T^2} \ \ldots \qquad (**)$$

$$100 \cdot \frac{d}{dt}(lnK) = 100 \cdot -\frac{q}{2T^2} = -\frac{50q}{T^2} \ \% \ .$$

7. هایپربولیک او د هغې معکوس تابع

a) هایپربولیک تابع

دا ډول تابع دe^x او e^{-x} اکسپوننسیال توابعو سره اړیکي لري او د لومړي ځل له پاره د **V.Riccatti (1657)**) په واسطه و پېژندل شوه .

8.4 تعریف

$$\text{ch } x := \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ . \qquad ; x \in \mathbb{R}$$

$$\text{sh } x := \frac{e^x - e^{-x}}{2} \ . \qquad ; x \in \mathbb{R}$$

$\text{th}\, x := \frac{shx}{chx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.   ; $x \in \mathbb{R}$

$\text{cth}\, x := \frac{chx}{shx} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$.   ; $0 \neq x \in \mathbb{R}$

په دې ځای کې که $y_1 = \frac{1}{2}e^x$ او $y_2 = \frac{1}{2}e^{-x}$ په نظر کې ونیول شي ،نو د دوی د ګرافونو د جمع او تفریق څخه کولی شو چې د chx ، shx همدارنګه thx او $cthx$ توابعو ګرافونه په لاس راوړو.

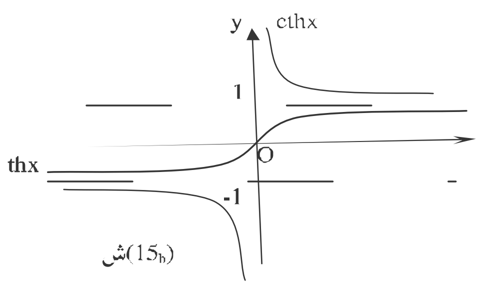
برسېره پردې د تعریف له مخې پوهیږو چې :

$\text{ch}\, x \geq 1$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}$; $-1 < \text{th}\, x < 1$,$\forall x \in \mathbb{R}$.   (i

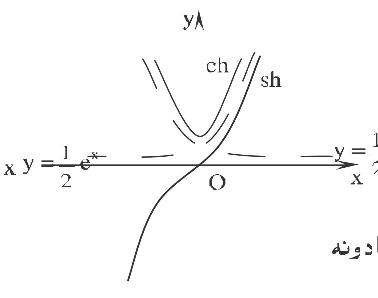
cthx< -1 ,$\forall x < 0$; cth x >1 ,$\forall x > 0$.

$\text{ch}\, x + \text{sh}\, x = e^x$; ch x-sh $x = e^{-x}$ . ...   (ii

$\Rightarrow ch^2x - sh^2x = 1$. [33]



ش(15b)

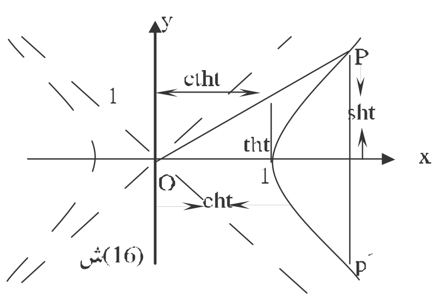


ش(15a)

یادونه

دا چې مثلثاتي توابع اکثراد ایروي توابعو په نوم یادیږي، همدارنګه هایپربولیک توابع هم د هایپربول سره خني مشترک خاصیتونه لري، نو له دې وجې د هایپربول نوم ورسره یوځای شوی دی، چې مشخصات یې په لاندې ډول دي د $x^2 + y^2 = 1$ دایرې د P(x,y) هره نقطه د $sin^2x + cos^2x = 1$ رابطې په نظر کې نیولو سره د x=cost او y= sint پارامتریکې معادلو په واسطه ښودل کیږي .

د $x^2 - y^2 = 1$ هایپربول مثبتې څانګې د P(x,y) هره نقطه د $ch^2x - sh^2x = 1$ رابطې په نظر کې نیولو سره د x=ch t او y= sht پارامتریکې معادلو په واسطه ښودل کیږي (16) ش



ش(16)

په هايپربوليک توابعو پورې اړوند رابطې

$ch(-x) = chx \quad ; \quad sh(-x) = -shx$.

$th(-x) = -thx \quad ; \quad cth(-x) = -cthx$.

$sh(x+y) = shx \cdot chy + chx \cdot shy$.

$ch(x+y) = chx \cdot chy + shx \cdot shy$.

$th(x+y) = \frac{thx+thy}{1+thx \cdot thy}$.

$cth(x+y) = \frac{1+cthx \cdot cthy}{cthx+cthy}$.

دپورتنيو رابطو څخه هره يوه په اسانۍ سره په لاس راوړلی شو. د مثال په توګه ليکو چې :

$$chx \cdot chy + shx \cdot shy = \frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}+e^{-y}}{2} + \frac{e^{x}-e^{-x}}{2} \cdot \frac{e^{y}-e^{-y}}{2}$$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{-x-y}}{2} = ch(x+y) \quad .$$

b) هايپربوليک معکوس تابع

لکه څنګه چې د Arc تابع د دايرې د قوس اوږدوالی (يا ددايرې د قطاع مساحت) سره اړيکې لري، په همدې ډول سره هايپربوليک معکوسې تابع هم د هايپربول د قطاع د مساحت (area) سره اړيکه لري . له دې سببه هغوی د area توابعو په نوم يادوواو داسې ليکل کيږي :

$ar\ shx \ ; \ ar\ chx \ ; \ ar\ thx \ ; \ arthx$.

دا چې د chx , shx توابع متمادي ، shx مونوتون متزايد او chx د x<0 له پاره مونوتون متناقص او د x>0 له پاره مونوتون متزايد دي ، نو $ar\ shx$ د $\forall x \epsilon \mathbb{R}$ له پاره متمادي ، مونوتون متزايد او ar chx د $\forall x > 0$ او $\forall x < 0$ له پاره په متمادي او مونوتون ځانګو ويشل کيږي .

او په لاندې ډول دي:

$sh^{-1}x := ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) ; \forall x \epsilon \mathbb{R}$

$ch^{-1}x := ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) ; \forall x \geq 1$

$th^{-1}x :== \frac{1}{2} ln \frac{1+x}{1-x} \quad ; x < 1$

$cth^{-1}x := \frac{1}{2} ln \frac{x+1}{x-1} \quad ; \quad x > 1$

$sech^{-1}x := ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}) \ ; \ 0 < x \leq 1$

$csch^{-1}x := ln(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}) \ ; \ x \neq 0$

د پورتنیو توابعو لاسته راوړنه د معکوسو توابعو د تعریف په نظر کې نیولو سره په لاس راځي .دا هم زیاتوو چې د ar shx ، ar chx او داسې نور په ځنې کتابونو کې د $sh^{-1}x$ ، $ch^{-1}x$ په واسطه هم ښودل کیږي.

8. د هایپربولیک او هایپربولیک معکوس توابعو مشتق

13.4 دعوی

هایپر بولیک تابع ګانې د تعریف په خپلو ناحیو کې مشتق پذیرې دي او

$$(shx)' = chx\ ;\ (chx)' = -shx$$

$$(thx)' = \frac{1}{ch^2x}\ ;\ (cthx)' = -\frac{1}{sh^2x}$$

کیږي .

ثبوت

د هایپربولیک تابع د تعریف او د مشتقاتو د قوانینو په نظر کې نیولو سره ، پورتنی دعوی په اسانی سره ثبوت کولی شو .

همدارنګه لیکو چې:

$$sech'x = -sechx \cdot thx.$$

$$csch'x = -cschx \cdot cthx\ ■$$

د هایپربولیک معکوس توابعو د مشتق فرمولونه

$$\frac{d}{dx}(sh^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ;\ \forall x \epsilon \mathbb{R}\ .$$

$$\frac{d}{dx}(ch^{-1}x) = \pm\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\ ;\ \forall x \geq 1\ .$$

$$\frac{d}{dx}(th^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}\ ;\ |x| < 1\ .$$

$$\frac{d}{dx}(cth^{-1}x) = \frac{1}{1-x^2}\ ;\ |x| > 1\ .$$

د پورتنیو رابطو څخه د ځینو ثبوتونه په لاندې مثالونو کې لیدلی شئ او د نورو پاتې رابطو ثبوتونه په مشابه توګه په لاس راځي .

37. مثال

وښئی چې $ch^2u - sh^2u = 1$ کیږي .

حل

$$ch^2u - sh^2u = \left(\frac{e^u+e^{-u}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^u-e^{-u}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}(e^{2u} + 2 + e^{-2u}) - \frac{1}{4}(e^{2u} - 2 + e^{-2u}) = 1$$

38. مثال

وښئی چې $\frac{d}{dx}(shx) = chx$ کیږي.

حل $\frac{d}{dx}(shx) = \frac{d}{dx}\left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx$.

39. مثال

(i $y = sh\,3x \Rightarrow y' = 3ch3x$

(ii $y = ch\frac{1}{2}x \Rightarrow y' = -\frac{1}{2}sh\frac{1}{2}x$.

(iii $y = th(1+x^2) \Rightarrow y' = sech^2(1+x^2)\cdot 2x$.

40. مثال

$(sh^{-1}(x)) = ?\ ;\ y' = ?$

حل

$y = sh^{-1}(x) \Rightarrow x = shy = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$

دواړه خواوې په $2e^y$ کې ضربوو :

$\Rightarrow 2e^y\cdot x = 2e^y\cdot\frac{1}{2}(e^y - e^{-y}) = e^{2y} - e^0 = e^{2y} - 1$

$\Rightarrow 2e^y\cdot x - e^{2y} + 1 = 0 \Rightarrow (e^y)^2 - 2x\cdot e^y - 1 = 0$

$\Rightarrow u^2 - 2xu - 1 = 0\ ;\quad (e^y := u)$

$\Rightarrow u_{1,2} = \frac{2x\pm\sqrt{4x^2+4}}{2}$.

$u_{1,2} = x \pm \frac{\sqrt{4x^2+4}}{2}$.

$\Rightarrow e^y = x + \sqrt{x^2+1}$.

$y = \ln(x+\sqrt{x^2+1}) \Rightarrow y' = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

او د $u_2 = x - \sqrt{x^2+1} < 0$ **څخه** صرف نظر کوو .

41. مثال

حل

$y = sech^{-1}(x) \Rightarrow y' = ?$

$\Rightarrow x = sechy = \frac{2}{e^{y}+e^{-y}}$

$\Rightarrow xe^{y} + xe^{-y} = 2.$

دواړه خواوې په e^{y} کې ضربوو:

$x \cdot e^{2y} + x = 2e^{y} . (e^{y} := u)$

$\Rightarrow xu^{2} - 2u + x = 0 \Rightarrow u_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4x^{2}}}{2x} = \frac{1\pm\sqrt{1-x^{2}}}{x}$

$\Rightarrow e^{y} = \frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}$; $e^{y} = \frac{1-\sqrt{1-x^{2}}}{x}$

$y=\ln\frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}$.

څرنګه چې د0 <e^{y} دی.نو له دې وجې څخه د $1-\sqrt{1-x^{2}}$ څخه صرف نظر کوو او یوازې د$e^{y} = \frac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{x}$ رابطه په نظر کې نیسو ، چې مشتق یې د 40. مثال په شان په لاس راځي

9. تمرین

1. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^{3}-27}{x-3} = ?$

2. $\lim\limits_{x \to 3} \frac{x^{2}-9}{x^{2}-x-6} = ?$

3. $\lim\limits_{x \to -7} \frac{2x^{2}+15x+7}{x^{2}-x-6} = ?$

4. $\lim\limits_{x \to 1} \frac{(x-1)^{2}(x^{2}+2)}{(x-1)^{2}(x-3)} = ?$

5. $\lim\limits_{x \to a} \frac{x^{m}-a^{m}}{x-a} = ?$

6. $\lim\limits_{x \to 2} \frac{x^{10}-2^{10}}{x-2} = ?$

7. $\lim\limits_{x \to \infty} (2x^{3} - 11x^{2} + 12x) = ?$

.8 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{2x} = ?$

.9 $\lim_{x\to -3} \frac{\sin(x+3)}{x+3} = ?$

.10 $\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{|x|} = ?$

.11 $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+100x} - x) = ?$

.12 $\lim_{x\to -3} \frac{\sin(x+3)}{x+3} = ?$

.13 $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x^2+2x}{x+5} - 3x\right) = ?$

.14 $\lim_{x\to\infty} \left(\sqrt{x^2+5} - \sqrt{x^2+3}\right) = ?$

.15 $\lim_{x\to a} \frac{\sqrt[m]{x} - \sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{a}}$

.16 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = ?$

.17 $\lim_{x\to -5} \frac{\sin(x+5)}{x+5} = ?$

.18 $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^2 x}{x} = ?$

.19 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^3} = ?$

.20 $\lim_{x\to 2^+} f(x) = ?;\ \lim_{x\to 2^-} f(x) = ?;\ \lim_{x\to 2} f(x) = ? \quad ; f(x) = \begin{cases} 3\ ; x < 2 \\ x^2\ ; x \geq 2 \end{cases}$

.21 $\lim_{x\to 2^+} h(x) = ? \quad ; \lim_{x\to 2^-} h(x) = ? \ ; \lim_{x\to 2} h(x) \ ; h(x) = \begin{cases} x^2+4\ ; x \leq 2 \\ x+2\ ; x > 2 \end{cases}$

ایا لاندې تابع ګانې د x په راکړل شویو قیمتونو کې متمادي دي ؟

	تابع	نقطه
.22	$f(x) = \sqrt[3]{x}$	-1;1
.23	$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}\ ; x \neq 2 \\ 0\ \ ; x = 2 \end{cases}$	2

24. $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & ; x \neq 2 \\ 4 & ; x = 2 \end{cases}$ 2; -2

25. $f(x)=\begin{cases} x^2+4 : x > 0 \\ -2 \quad ; x = 0 \\ x+4 \ : x < 0 \end{cases}$ -1;0

26. $f(x)=\begin{cases} \frac{\sin x}{x} ; x > 0 \\ 0 \quad ; x = 0 \\ x-2 \quad ; x < 0 \end{cases}$ 5;0

27. د $y=4x-x^2$ پارابول باندې د مماس میل د (1,3) په نقطه کې پیدا کړئ .

28. د $y=4x-x^2$ پارابول له پاره، د مماس معادله د (1,3) په نقطه کې پیدا کړئ .

29. که $F(x)=\frac{5x}{1+x^2}$ وي. $F'(2)$ پیدا کړئ او بیا د $F'(2)$ په استفاده سره د $F(x)=\frac{5x}{1+x^2}$ په منحني باندې د مماس معادله د (2,2) په نقطه کې پیدا کړئ .

30. یو جسم د مستقیم خط په امتداد د $s(t)= t^2 - 8t + 18$ معادلې له مخې حرکت کوي .

(a) د s له پاره متوسط سرعت په لاندې انترولونو کې په لاس راوړئ .

(i [3,4]   (ii [3.5,4]   (iii [4,5]   (iv [4,4.5)

b) په t=4 sec کې د جسم لحظوي سرعت پیدا کړئ.

31. (a د $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ په منحني باندې د مماس میل په x=a کې پیدا کړئ.

b) د مماس معادلې د (1,1) او $(4,\frac{1}{2})$ په نقطو کې پیدا کړئ .

32. یوه منحني د $y= f(x)$ معادلې لرونکې ده.

a) د منحني د هغه وتر له پاره چې د $P(3,f(3))$ او $Q(x,f(x))$ نقطو څخه تېرېږي ، د میل معادله ولیکئ

b) په منحني باندې د P په نقطه کې مماس پیدا کړئ .

33. د لاندېنیو توابعو له پاره په راکړل شویو نقطو کې د مماس معادلې ولیکئ .

(i $y=\frac{x-1}{x-2}$; (3,2)

(ii $y=\frac{2x}{(x+1)^2}$; (0,0)

(iii $y=\sqrt{x}$; (1,1)

په لاندېنیو افادو کې $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{d^2y}{dx}$ په لاس راوړی.

.34 $x^2 - xy + y^2 = 3 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = ?\,; \frac{dy}{dx} = ?$

.35 $x^2y - xy^2 + 5x = 5 \quad ; \quad \frac{dy}{dx} = ?\,; \frac{d^2y}{dx^2} = ?$

.36 د غیر صریح مشتقاتو په نظر کې نیولو سره $\frac{dy}{dx}$ په لاس راوړی.

(i $x^3 + y^3 = 1$

(ii $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

(iii $1+x = \sin(x\ y^2)$

(iv $\sqrt{x+y} = 1 + x^2 + y^2$

.37 د غیر صریح مشتقاتو په استعمال سره ،د مماسي خط معادلې په راکړل شویو نقطو کې پیدا کړی.

(i $x^2 + xy + y^2 = 3 \quad ; \quad (1,1) \quad (ellipse)$

(ii $x^2 + 2xy - y^2 + x = 2 \quad ; \quad (1,2) \quad (hyperbula)$

(iii $x^2 + y^2 = (2x^2 + 2y^2 - x)^2 \,; \quad \left(0, \frac{1}{2}\right)$

.38 د غیرصریح مشتقاتو له لارې y'' پیدا کړی.

(i $9\,x^2 + y^2 = 9$

(ii $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$

(iii $x^4 + y^4 = a^4$

.39 د غیر صریح مشتقاتو له لارې و ښیی چې د (x_0, y_0) په نقطه کې په $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ باندې د مماس معادله د $\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1$ څخه عبارت دی.

.40 و ښیی چې د $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{c}$ د منحني له پاره د هر ټانجنت د تقاطع نقطو مجموعه د x او y په محورونو باندې د c سره مساوي ده. [12]

.41 د $f(x) = \frac{secx}{1+tanx}$ مشتق پیدا کړی او د x په کوم قیمت سره د منحني ګراف افقي مماس لري.

.42 که $y = \frac{1+sinx}{x+cosx}$ وي، $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړی.

.43 $f(\theta) = \frac{sec\theta}{1+sec\theta}$ وي $\frac{df}{d\theta}$ پیدا کړی.

.44 ثبوت کړی چې $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cdot \cot x$ کیږي.

.45 د $y = 2x \cdot sinx$ په منحني باندې د $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ په نقطه کې د مماس معادله پیدا کړی.

46. که $f(x) = \cos x$ وي د مشتق د تعریف له مخې ثبوت کړی چې $f'(x) = -\sin x$ کیږي .
47. د $y=\sec x-2\cos x$ په منحني باندې د مماس معادله په$(\frac{\pi}{3}, 1)$ نقطه کې پیدا کړی .
48. که $f(x) = e^x \cos x$ وي f' او f'' پیدا کړی .
49. که $H(\theta) = \theta \sin\theta$ وي$H'(\theta)$ او$H''(\theta)$ پیدا کړی .
50. که$f(\frac{\pi}{3}) = 4$, $f'(\frac{\pi}{3}) = -2$, $g(x) = f(x) \sin x$ او$h(x) = \frac{\cos x}{f(x)}$ وي$h'(\frac{\pi}{3})$او$g'(\frac{\pi}{3})$ پیدا کړی .
51. $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ مشتق پیدا کړی .

د لاندېنیو توابعو مشتق د امکان تر حده پورې په ساده شکل پیدا کړی

52. $y= \tan^{-1}(\sqrt{x})$

53. $y=\sin^{-1}(2x + 1)$

54. $f(\theta) = \arc \sin\sqrt{\sin\theta}$

55. $y = \cos^{-1}(e^{2x})$

56. $g(x) = \sqrt{x^2 - 1}\sec^{-1}x$

57. $h(t)= \cot^{-1}(t) + \cot^{-1}\left(\frac{1}{t}\right)$

58. د لاندېنیو توابعو مشتقات په لاس راوړی .

(i $y=e^{3x^2}$

(ii $y= x^2e^{3x^2}$

(iii $y= \frac{e^{ax}- a^{-ax}}{e^{ax}+ e^{-ax}}$

59. که $y=(x^2 + 2)^3(1 - x^3)^4$ وي $y' =?$.

61.د لاندېنیو افادو عددي قیمتونه پیدا کړی .

.i	(a	sh(0)	(b	ch(0)
.ii	(a	sh(ln2)	(b	sh(2)
.iii	(a	$sh^{-1}(1)$	(b	sh(1)
.iv	(a	$sh^{-1}(1)$	(b	sh (0)

62. ثبوت کړی چې $sh(-x) = ch\ x$ کیږي .

63. ثبوت کړی چې e^x=ch (-x) - sh xکیږي

64. ثبوت کړی چې e^{-x}=ch(x) - ch xکیږي

65. ثبوت کړی چې e^x=ch(x) + sh xکیږي

66. ثبوت کړی چې sh2x =2 shx chx کیږي .

67. ثبوت کړی چې $(chx + shx)^n$ = ch nx + sh nx ; n∈ ℝ کیږي .

د لاندینیو توابع مشتق پیدا کړی .

68. $f(x) = e^x shx$

69. $g(x) = ch^4 x$

70. $y = e^{chx}$

71. $y = coth^{-1}\sqrt{x^2+1}$

72. د فزیک د قوانینو له مخې که یو کېبل (چې انجامونه یې ګوښې ګوښې په دوو پایو پورې تړل شویوي) ځوړند شي ، هغه د یوې تابع منحنی راښیي ، چې د هغې له پاره د

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\rho g}{T}\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}$$

معادله صدق کوي . وښیی چې ددې معادلې حل د

$$y=f(x)=\frac{T}{\rho g}\, ch\,(\frac{\rho g x}{T})$$

څخه عبارت دی .

73. ثبوت کړی چې د y=a·sh mx+a· ch mx هره معادله د $y'' = m^2 y$ معادلې حل دی .

پنځم فصل

د مشتق کارونه او تطبیقات

1. اعظمي او اصغري نقطې

د مخه مو د مشتق داستعمال اوتطبیقاتو په اړه یوه اندازه معلومات تر لاسه کړل او اوس چې د مشتق نیولو په قوانینو کې ښه لاس رسی لرو ،نو د دوهم ځل له پاره بیا هم د مشتق تطبیق او استعمال په دقیقه توګه سره تر کتنې لاندې نیسو.دلته به دا په ګوته کړو چې د مشتق څخه څنګه د یوې تابع د ګراف په رسمولو کې ګټه اخیستل کیږي او څنګه د تابعد ګراف اعظمي او اصغري موقعیتونه معلومولی شو. همدارنګه په اکثرو تطبیقي مسایلو کې د ضرورت له مخې د یوې مسئلې د ډېر کم یاډېر لوړ قیمت موندلو په اړه هم ګټه ورڅخه اخیستلی شو. نو د دا ډول موضوعاتو د څېړلو د مخه یو څو تعریفونه او دعوې په نظر کې نیسو :

1.5 تعریف

که f یوه تابع او $x_0 \epsilon D(f)$ وي، وایو چې:

i) د f تابع په x_0 کې د یوه اعظمي موضعي (local max) لرونکي ده ،که

$$\exists\delta > 0 \;;\; \forall x \in |x - x_0| < \delta : f(x_0) \geq f(x).$$

ii) د f تابع په x_0 کې د یوه اصغري موضعي(local min) لرونکي ده ، که

$$\exists\delta > 0 \;;\; \forall x \in \; |x - x_0| < \delta : f(x_0) \leq f(x).$$

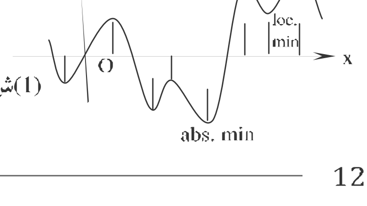
وي.

2.5 تعریف

i) د f تابع په $x_0 \epsilon D(f)$کې د اعظمي مطلق (Absolute max) لرونکي ده ،که چېرې $\forall x \in D(f)$ له پاره $f(x_0) > f(x)$ صدق وکړي یعنې: $\mathrm{f}(x_0) = \max_{D(f)} f(x)$.

ii) د f تابع په $x_0 \epsilon D(f$ کې د یوه اصغري مطلق(Absolute min) لرونکي ده ، که چېرې$\forall x \in D(f)$ له پاره$f(x_0) < f(x)$ صدق وکړي یعنې: $\mathrm{f}(x_0) = \min_{D(f)} f(x)$.

په عمومي ډول سره د یوې تابع له پاره اعظمي، اعظمي موضعي، اصغري او اصغري موضعي نقطې دنهایي نقطو (**Extremume**) په نوم یادیږي.



ش(1)

1.5 دعوی "Fermat[6]"

که چېرې f په $[a,b]$ کې تعریف او په $x_0 c(a,b)$ کې د مشتق وړ وي، داسې چې په x_0 کې د یو اعظمي موضعي یا یو اصغري موضعي لرونکي وي، نو $f'(x_0)=0$ دی.

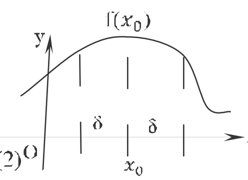
ثبوت

دلته یوازې اعظمي موضعي حالت په ثبوت رسوو ..د دعوې د فرضیې څخه پوهېږو چې:

$$\exists\delta>0\ ;\ \forall_{\substack{x\in D(f)\\ |x-x_0|<\delta}} : f(x)\le f(x_0)\ .$$

له دې ځایه لرو چې $f(x_0)-f(x)\geq 0$ کیږي. نو

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\le 0\ ;x>x_0$$



ش(2)

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0\ ;x<x_0$$

$$\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\ \le 0$$

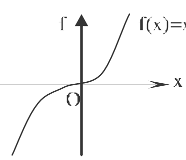
$$0\le \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)$$

$$\Rightarrow 0\le f'(x_0)\le 0\Rightarrow f'(x_0)=0\,.\blacksquare$$

د اصغري موضعي حالت ثبوت هم د پورته په شان دی او د تمرین په توګه درته پاته شو .

نوټ

د $f(x)=x^3$ تابع په $D(f)=[-1,1]$ کې مطالعه کوو .. معلومیږي چې $f'(x)=3x^2$ او $f'(0)=0$ دی او په x_0 کې اعظمي موضعي او اصغري موضعي نه لري. یعنې د $f'(x)=0$ شرط د اعظمي او اصغري له پاره کافي نه دی او یو لازمي شرط دی.(3) ش وګوری.

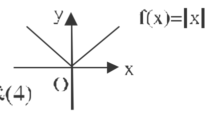


ش(3)

دا هم زیاتوو چې غیر قابل اشتق توابع هم ، اعظمي یا اصغري قېمتونه درلودلی شي. د مثال په توګه $f(x)=|x|$ تابع په x=0 کې مشتق نه لري او د اصغري مطلق لرونکي ده .(4) ش وګوری .

---

[6] Fermat, Pierre de (1601-1665) فرانسوي ریضي دان.



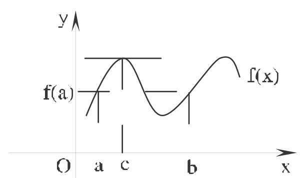
ش(4)

2.5 د "Rolle[7]" دعوی

که چيرې د f تابع په [a,b]کې متمادي ، (a,b) کې د اشتقاق وړ او f(a)=f(b) وي په دې صورت کې $\exists c\epsilon(a,b)\ ;\quad f'(c)=0$ صدق کوي.

ثبوت

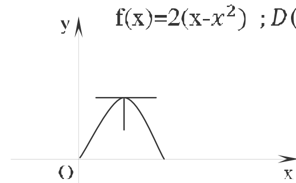
که چیرې د هر $x\epsilon[a,b]$ له پاره f(a)=f(b) وي، نو د هر $c\epsilon[a,b]$ له پاره $f'(c)=0$ دی.
ددې حالت څخه پرته، څرنګه چې د f تابع په $[a,b]$کې متمادي او يو $c\epsilon(a,b)$ موجود دی ،چې په هغه کې تابع د يوه اعظمي موضعي يا اصغري موضعي لرونکي ده . د1.5 دعوې له مخې $f'(c)=0$ کيږي او f په c کې يو افقي مماس لري. (5) ش■



ش(5)

1.مثال

f(x)=2(x-x^2) ;$D(f)=[0,1]$



ش(6)

f(0)=f(1)=0

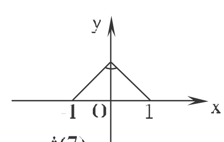
$\Rightarrow \exists c\epsilon(a,b)\ ;\ f'(c)=0$

$f'(x)\ =2(1-2x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow c=\frac{1}{2}\Rightarrow\frac{1}{2}\epsilon(0,1).$

او د Rolle دعوې صدق کوي.

2.مثال



ش(7)

f(x)=1-|x|;D(f)=[-1.1]

f(-1)=f(1)=0 .

---

[7] Michel Rolle (1652-1719) فرانسوی رياضي دان.

دلته په هیڅ صورت یو c په (1,1-) کې نه پیدا کیږي چې $f'(c)=0$ صدق وکړي . ځکه چې د f تابع په (1,1-) انټرول کې د اشتقاق وړ نه ده.

3. مثال

د $P(x)=x^{45}+5x^{17}+2x-8$ په پولینوم کې $P(1)=0$ دی او کومه بله صفري نقطه نه لري. ځکه چې د Rolle دعوې په اساس که کومه بله صفري نقطه د P له پاره موجوده وي نو لاژمه ده چې $P'=0$ شي، لیکن د هر x له پاره $P'(x)=45x^{44}+85x^{16}+2>0$ دی .

3.5 دعوی (د وسطي قیمت لومړی دعوی)

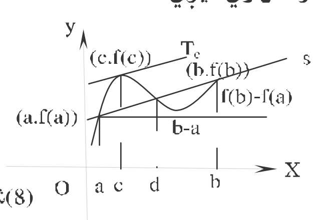
که چیرې f په $[a,b]$ کې متمادي او په (a,b) کې د اشتقاق وړ وي ، نو

$$\exists c\epsilon(a,b)\ ;\quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$$

کیږي.

د دعوې هندسي تعبیر

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ د S مستقیم خط میل دی ،چې دمنحني د (a,f(a)) او (b,f(b)) دوونقطو څخه تیریږي او $f'(c)$ د مماس (T_c)میل په منحني باندې د (c,f(c))په نقطه کې دی. نو د متوسط قیمت دعوی بیانوي چې یو $c\epsilon(a,b)$ موجود دی ،چې په هغه کې T_c د S سره موازي کیږي.



ش(8)

ثبوت

د $F(x):=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$ کومکي تابع په نظر کې نیسو. دا تابع په $[a,b]$ کې متمادي او په (a,b) کې د اشتقاق وړ دی. څرنګه چې

$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

$F(a)=f(a)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(a-a)=0$.

$F(b)=f(b)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=0$.

$\Rightarrow F(a)=F(b)=0$.

او د $R0lle$ دعوی په کې صدق کوي.یعنې

$\exists c\epsilon(a,b);\ \ F'(c)=0$

$\Rightarrow f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$

$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.\ \blacksquare$ [32]

4. مثال

د $f(x)=x^2+4x+4$ تابع د $[a,b]=[1,4]$ په انترول کې په نظر کې نیسو :

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=\frac{f(4)-f(1)}{3}=\frac{16+16+4-1-4-4}{3}=9$

څرنګه چې $f'(x)=2x+4$ دی، نو

$\exists c\epsilon(1,4)\ \ f'(c)=\frac{f(4)-f(1)}{3}=9$

$\Rightarrow f'(c)=2c+4=9$

$\Rightarrow\ c=2.5\Rightarrow c\in(1,4)\ \ .$

5. مثال

د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع په نظر کې نیسو . لرو چې :

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad .$

د 3.5 وسطي قیمت دعوې په اساس د $n\epsilon\mathbb{N}$ له پاره د $(n,n+1)$ په انترول کې د $n+\delta$ عدد د $\delta<1$ له پاره موجود دی ،داسې چې :

$\frac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}=f'(n+\delta)\Rightarrow\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{2\sqrt{n+\delta}}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\ \ =\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2\sqrt{n+\delta}}$

$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=0\,.$

$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1})=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\ \ .$

نتیجه

د f د اشتقاق وړ تابع د $[a,b]$ په انترول کې ثابته ده ، که د $\forall x\epsilon[a,b]$ له پاره $f'(x)=0$ صدق وکړي .

ثبوت

i) که چېرې د $f=const$ تابع د $[a,b]$ په انترول کې راکړل شوي وي، نو

$\forall x\epsilon[a,b]\,;\ \ f'(x)=0\ \ .$

ii)   که چېرې د f تابع د $[a,b]$ په انټرول کې د اشتقاق وړ او د هر $x\epsilon\,[a,b]$ له پاره $f'(x)=0$ وي. د وسطي قیمت دعوې د $x_0\epsilon[a,b]$ له پاره د $[a,x_0]$ په انټرول کې تطبیق کوو او د یو $c\in(a,b)$ له پاره لرو چې

$$f\,(x_0)\text{-}f(a)=\frac{f(x_0)-f(a)}{x_0-a}(x_0-a)=f'(c)(x_0-a)=0$$

یعنې $f(x_0)=f(a)$ دی. څرنګه چې x_0 یو اختیاري عدد دی ، نو $f(x)$ ثابت دی.

iii)   که چېرې f او g په $[a,b]$ کې د اشتقاق وړ او د $\forall x[a,b]$ له پاره $f'(x)=g'(x)$ وي. نو په دې صورت کې د c یو ثابت شته چې د هغې له پاره لاندې رابطه صدق کوي.

$$\forall x\in[a,b]\,;\;\; f(x)=g(x)+c$$

ثبوت.

د $h(x):=f(x)\text{-}g(x)$ تابع په نظر کې نیسو. پوهیږو چې:

$$\forall x\in[a,b];\; h'(x)=0\Rightarrow h(x)=\text{const.}$$

په نتیجه کې

$$\Rightarrow h(x)=f(x)\text{-}g(x)=c$$
$$\Rightarrow f(x)=g(x)+c.\;\blacksquare$$

4.5 دعوی

i)   که چېرې د f تابع د $[a,b]$ په انټرول کې د اشتقاق وړ او د هر $\forall x\epsilon(a,b)$ له پاره $f'(x)>0$ وي ، په دې صورت کې د f تابع په $[a,b]$ کې دقیق مونوتون متزاید ده.

ii)   که چېرې د f تابع په $[a,b]$ کې د اشتقاق وړ او د هر $\forall x\epsilon(a,b)$ له پاره $f'(x)<0$ وي ، په دې صورت کې د f تابع په $[a,b]$ کې دقیق مونوتون متناقصه ده

ثبوت

i)   فرضوو چې $\forall x\epsilon(a,b);\; f'(x)>0$ او $a\le x_1\le x_2\le b$ دی.

نو

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_1)=f'(c)\left(x_2-x_1\right)>0\;;$$
$$(f'(c)>0,x_2>x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_2)>f(x_1).$$

ii)   که $a\le x_1\le x_2\le b$ او $f'(x)<0$ ، $\forall x\epsilon(a,b)$ وي نو لرو چې

$$f(x_2)-f(x_1)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x_2-x_1)=f'(c)\left(x_2-x_1\right)<0\;;$$
$$(f'(c)<0,x_2>x_1)$$

$$\Rightarrow f(x_1)>f(x_2).\;\blacksquare$$

6. مثال

$f(x)=x^3 \Leftarrow f'(x) = 3x^2 \geq 0 \Leftarrow$ د f تابع تل مونوتون متزایده ده.

7. مثال

$f(x) = x^3 + x \Leftarrow f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \Leftarrow$ د f تابع د تل له پاره دقیق مونوتون متزایده ده.

8. مثال

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & ; x > 1 \\ 1 & ; -1 \leq x \leq 1 \\ x^2 + 2x + 2 & ; x < -1 \end{cases}$$

دا تابع په $\mathbb{R}$ کې د اشتقاق وړ ده. ځکه چې د هغې د اشتقاق وړتوب ، د $x \in (-\infty, -1)$ ، $x \epsilon [-1,1]$ او $x \in (1, \infty)$ له پاره کاملاً واضح دی او د $x=-1$ له پاره د تابع د اشتقاق په اړه لرو چې :

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^-} \frac{x^2+2x+2-1}{x+1} = \lim_{x\to -1^-}(x+1) = 0$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \lim_{x\to -1^+} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} = \frac{1-1}{x+1} = 0 \quad .$$

بنا پردې

$$f'(x) = \begin{cases} -2x + 2\, ; x > 1 \\ 0 \quad ; -1 \leq x \leq 1 \\ 2x + 2\, ; x < -1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ ، } \forall x \epsilon \mathbb{R} \quad .$$

په نتیجه کې دا تابع مونوتون متناقص ده .دا چې $f(-1) = f(1) = 1$ دی. نو دقیق مونوتون متناقص نه ده.

نتیجه

که چېرې د f تابع په $[a, b]$ کې د اشتقاق وړ او د $\forall x \epsilon [a, b]$ له پاره $f'(x) > 0$ یا $f'(x) < 0$ وي. په دې صورت کې دا تابع دقیق مونوتون متزایده یا دقیق مونوتون متناقصه ده او د هغې معکوسه تابع وجود لري.

5.5 دعوی(د وسطي قیمت دوهمه دعوی)

که چېرې د f او g توابع په $[a, b]$ کې متمادي او په (a,b) کې د اشتقاق وړ او د هر $x \epsilon (a, b)$ له پاره $g'(x) \neq 0$ وي ، نو

$$\exists c \epsilon (a, b);\ \frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

کیږي.

ثبوت

څرنګه چې $g'(x) \neq 0$ دی نو $g(a) \neq g(b)$ دی او پرته له دې د c یو عدد شته چې په هغې سره $g'(c)=0$ کیږي. د مطلب د حل له پاره د F(x) یوه کومکي تابع په نظر کې نیسو :

$$F(x)=f(x)-f(a)-\big(g(x)-g(a)\big)\cdot\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

د F تابع په $[a,b]$ کې متمادی ، په (a,b) کې د اشتقاق وړ او F(a)=F(b)=0 دی. لرو چې :

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(x)$$

$$\Rightarrow \exists c \epsilon (a,b);\ F'(c)=\ f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\cdot g'(c)=0$$

$$\Rightarrow \frac{f'(c)}{g'(c)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.\ ■$$

دلته که g(x)=x انتخاب شي د وسطي قیمت لومړی دعوی په لاس راځي.[12]

2. د مشتق منونکو توابعو د اعظمي او اصغري قیمتونو موندل

څرنګه چې د اکستریمم (نها یي نقطې) په اړه په 1.5 دعوی کې د یوه لازمي شرط په توګه یادونه شویده او دلته غواړو چې د یو ه کافي شرط په توګه د اکستریمم قیمتونو د تثبیت څخه بحث وکړو. دا چې واقعاً د اکستریمم قیمت وجود و لري هغه د f تابع د لوړ مرتبه مشتقاتو د تحقیق په واسطه تر څېړنې لاندې نیول کیږي. د موضوع د واضح والي له پاره لاندینی مثال په نظر کې نیسو.

د $f(x)=x^3+6x^2-15x+8$ تابع په $\mathbb{R}$ کې د اشتقاق وړ او f(-8)=f(1)=0 دی. نو د Rolle دعوې په اساس $\exists x_0 \epsilon(-8,1)\ ;\ f'(x_0)=0$ صدق کوي.

$$\Rightarrow f'(x)=3x^2+12x-15=0 \Rightarrow x=-5; x=1$$

دلته د اکستریمم ممکنه قیمتونه $x_1=1$ او $x_2=-5$ دي. مثلاً په $x_2=-5$ کې یوه اعظمي موضعي لري او هغه د f(-5)=108 سره مساوي دی . ځکه چې

$f(-5+h)=108+h^3-9h^2<108\ ; h\epsilon(-\infty,9)$

کیږي. په هر صورت لاندینی دعوی د اکستریمم قیمتونو د موندلو لپا ره ډېرې اسانتیاوې برابروي.

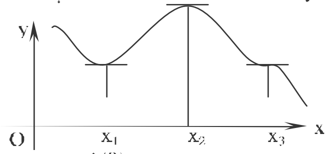
6.5 دعوی

که چېرې د f تابع د (a,b) په انترول کې د اشتقاق وړ او په $x_0 \epsilon(a,b)$ کې $f'(x_0)=0$ وي، نو:

1) که چېرې د f' اشاره د x_0 په شاوخوا کې تغیر وکړي په دې صورت کې د f تابع د یوه اکستریمم قیمت لرونکي ده.

i) د f تابع د یوه اعظمي موضعي لرونکي ده ،که چېرې د $f'(x)$ اشاره د x_0کینېې خوا د "+" څخه "-" ته تغیر وکړي.

ii) د f تابع د اصغري موضعي لرونکي ده ،که چېرې د $f'(x)$ اشاره د x_0 دکینې خوا د "-"څخه "+" خواته تغیر وکړي.



(9)ش

2) که چېرې د $f'(x)$ اشاره تغیر و نکړي په دې صورت کې دf تابع د اکستریمم قېمت نه لري. (9)ش وګورئ.په لنډه توګه بیانوو چې:

اصغري موضعي	$:f'(x) < 0$	د x_1 چپ خواته
	$;\ f'(x) > 0$	د x_1 ښي خواته
اعظمي موضعي	$:f'(x) > 0$	د x_2 چپ خواته
	$:f'(x) < 0$	د x_2 ښي خواته
د اکستریمم قېمت نه لري	$:f'(x) < 0$	د x_3 چپ خواته
	$;\ f'(x) < 0$	د x_3 ښي خواته

ثبوت

که چېرې د f' تابع په x_0 کې د "+" څخه "-" ته د اشارې تغیر وکړي په دې صورت کې

$$\exists\delta > 0\ ;\ \ \forall x\epsilon(x_0-\delta, x_0)\ \ f'(x) > 0\ \ \wedge \forall x \in (x_0, x_0+\delta)\ \ \ f'(x)<0\ \ .$$

نو د4.5 دعوې له مخې دf تابع د $]x_0-\delta, x_0]$په انترول کې دقیق مونوتون متزایده او د $[x_0, , x_0+\delta[$ په انترول کې دقیق مونوتون متناقصه ده. بنا پردې

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\ \ \ \ f(x_0) \geq f(x)\ .$$

کیږي. په نتیجه کې دf تابع په x_0 کې د یوه اعظمي موضعي لرونکي ده. په همدې ترتیب ښودلی شو چې که د f' تابع د "-"څخه "+" ته تغیر وکړي،د f له پاره اصغري موجوده ده اوکه د f' اشاره تغیر و نکړي د اکستریمم قېمت وجود نلري.■

7.5 دعوی

که چېرې د f تابع په (a,b) کې دوه ځلې د اشتقاق وړاو په $x_0\epsilon(a,b)$ کې $f'(x_0) = 0$ وي په دې صورت کې:

i) که $f''(x_0) < 0$ وي ،د f تابع په x_0 کې یوه اعظمي موضعي لري.

ii) که $f''(x_0) > 0$ وي ،د f تابع په x_0 کې د یوه اصغري موضعي لري.

ثبوت

$f'(x_0) = 0 \ \wedge \ f''(x_0) < 0$

نو

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = f''(x_0) < 0$$

$$\Rightarrow \exists \delta > 0 \ ; \ \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} < 0 \ ; \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \ ; x \neq x_0.$$

او پرته له دې دا لیمېټ نشي موجود کیدلی.داچې $f'(x_0) = 0$ دی.لیکو چې:

$f'(x) < 0 \ ; x_0 < x < x_0 + \delta \ .$

$f'(x) > 0 \ ; x_0 - \delta < x < x_0 \quad .$

څرنګه چې f' په x_0 کې داشارې تحول (دمثبت څخه منفي خواته) کوي، بنا پردې د f تابع په x_0 کې د یوه اعظمي موضعي لرونکي ده.

ii) په پورته ډول سره ښودلی شوچې که $f'(x_0) = 0$ او $f''(x_0) > 0$ وي د f' تابع د اشارې تحول په x_0کې د منفي څخه مثبت خواته دی چې دا په خپله د اصغري موضعي په موجودیت باندې دلالت کوي.
دا دعوی په هغه صورت کې چې $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ وي د اکستریمم قیمتونو موجودیت نه شي راښودلی او په دې برخه کې لازمه ده چې د f تابع لوړ مرتبه مشتقات د مطالعې لاندې ونیول شي. ■

8.5 دعوی

که چېرې د f تابع د (a,b) په انټرول کې n- ځلې (n ≥ 2) د اشتقاق وړ او د $x_0 \epsilon (a, b)$ له پاره

$$f'(x_0) = f''(x_0) \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0 \ ; \ f^{(n)}(x_0) \neq 0$$

صدق وکړي، په دې صورت کې:

i) که n جفت وي د f تابع په x_0 کې یو اکستریمم قیمت لري. که $f^{(n)}(x_0) < 0$ وي، د f تابع اعظمي موضعي او که $f^{(n)}(x_0) > 0$ وي اصغري موضعي لري.

ii) که چېرې n یو طاق عدد وي په دې حالت کې د f تابع د اکستریمم قیمت نه لري.

ثبوت

(د دې دعوې د ثبوت څخه فعلاً صرف نظر کوو) ■

9. مثال

$f(x) = \frac{1}{3} \ x^2(x-3)$

$f'(x) = \frac{2}{3}x(x-3) + \frac{1}{3}x^2 = x(x-2)$

دلته د اکستریمم قیمتونو په حیث $x_1 = 0$ او $x_2 = 2$ په نظر کې دي:

$f''(x) = (x-2) + x = 2(x-1) \ .$

$f''(0) < 0 \, , f''(2) > 0 \ .$

بنا پردې د f تابع په $x_1=0$ کې یوه اعظمي موضعي او په $x_2=2$ کې یوه اصغري موضعي لري.

10. مثال

(i

$$f(x)=x^2\ ;\ D(f)=\mathbb{R}$$

$$f'(x)=2x\ ;\ f''(x)=2>0\ .$$

له دې معلومیږي د f تابع په $x_0=0$ کې یوه اصغري موضعي لري او څرنګه چې د هر $x\in\mathbb{R}$ له پاره $x^2\geq 0$ دی، نو په $x_0=0$ کې د f تابع اصغري مطلق لري او دا چې $\lim\limits_{x\to\infty} x^2=\infty$ دی ، اعظمي مطلق نه لري .

ii) د $f(x)=x^2$ تابع $(D(f)=(-2,4])$ په $x_0=0$ کې یوه اصغري مطلق لري . دا چې د $|x|<4$ له پاره $x^2<16$ کیږي نو f(x) په $x_1=4$ کې یو اعظمي مطلق لري.همدارنګه د $x\in(-2,0]$ له پاره $x^2<4$ کیږي، په دې صورت کې د f تابع په $x_2=-2$ کې یوه اعظمي مطلق لري. څرنګه چې د f تابع په $x_2=-2$ کې داشتقاق وړنه ده او پورتنی دعوی په $x_2=-2$ کې په هغه باندې نشي تطبیق کیدلی.

11. مثال

$$f(x)=x^4-2$$

$$f'(x)=4x^3\ ;\ f''(x)=12x^2\ ;f'''(x)=24x\ ;\ f^{(4)}(x)=24$$

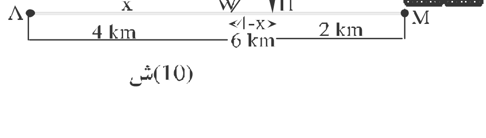
$$f'(0)=f''(0)=f'''(0)=0\ \wedge\ f^{(4)}(0)>0.$$

بنا پردې د f تابع په $x_0=0$ کې یوه اصغري موضعي لري.

12. مثال

د اوبو د A یو مخزن څخه د نل پواسطه د M یوه مرکزي تعمیر ته اوبه تیریږي ، داسې چې د M او A تر منځ فاصله 6km ده.برسېره پردې د A مخزن څخه د T تحویلخانې ته هم د یوه فرعي نل په واسطه اوبه تیریږي ، په داسې حال کې چې T د نل څخه 1km فاصله لري . همدارنګه د H او M ترمنځ فاصله 2km ده او د یوه متر نل قیمت په لاندې ډول تعین شوی دی:

دعمومي نل د یومتر قیمت 80 افغانۍ، د عمده نل د یو متر قیمت72 افغانۍ، د فرعي نل د یومتر قیمت 64 افغانۍ دی . که ټول نلونه په مستقیم ډول تیر شي په کومه فاصله د اوبو د مخزن څخه فرعي نل د عمده نل څخه جلا شي، تر څو چې ډیر کم مصرف تر سره شي.



ش(10)

حل

$\overline{WT} = \sqrt{1+(4-x)^2}$

دعمومي مصرف (K) له پاره ليکو چې :

K=80x+72(6-x)+64· $\sqrt{1+(4-x)^2}$

K=f(x)=8x+64$\sqrt{17-8x+x^2}$ +432 .

$$f'(x) = 8 + 64 \cdot \frac{2x-8}{2\cdot\sqrt{x^2-8x+17}}$$

$$f''(x) = 64\frac{x^2-8x+17-(x-4)^2}{(x^2-8x+17)^{\frac{3}{2}}}$$.

د اصغري قېمت د موندلو له پاره $f'(x) = 0$ وضع کوو :

$$\Rightarrow f'(x) = 0$$

$$\Rightarrow 8 + 64 \cdot \frac{2x-8}{2\cdot\sqrt{x^2-8x+17}} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{8\cdot\sqrt{x^2-8x+17}+64x-256}{\sqrt{x^2-8x+17}} = 0$$

$$\Rightarrow 63x^2 - 504x + 1007 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 \cong 4\ ;\ x_2 \cong 3.87$$

دا چې $f''(4) > 0$ دی نو د $x_1 \cong 4$ له پاره د نلدوانی مصارف د اصغري حد لرونکي دي. او د $x_2 \cong 3.87$ قېمت په اصلي معادله کې صدق نه کوي د هغې څخه صرف نظر کوو .

3.5 تعریف

د مشتق منونکي تابع(f)له پاره د($(x_0, f(x_0)$ نقطه ، دتابع د ګراف له پاره د انعطاف نقطې په نوم يادېږي، په هغه صورت کې چې $f'(x)$ په x_0 کې د يوه اکستريمم قېمت لرونکی وي. يعنې که x_0) د,f(x_0) اد f ګراف د انعطاف يوه نقطه وي . $f''(x_0) = 0$ دی . په داسې حال کې چې f دوه ځلې مشتق منونکې وي .

9.5 دعوی

که چېرې د f تابع په $x_0\epsilon D(f)$ کې n-ځلې مشتق منونکې (n≥ 3) ، $f^{(i)}(x_0) = 0\,; i = 2, \dots, n-1$ ،

$f^{(n)}(x_0) \neq 0$او n يو طاق عدد وي، نو f په x_0 کې د انعطاف نقطه لري .

ثبوت

ثبوت يې د 8.5 دعوې له مخې واضح ده. ■

13. مثال

f(x)=x^3 ; $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = 3x^2$

$f''(x) = 6x \;\; \Rightarrow f'''(x) = 6$

نو f(x)=x^3 په0= x_0 کې د انعطاف نقطه لري .

14. مثال

f(x) $= \frac{1}{x^2+1}$; $D(f) = \mathbb{R}$

$f'(x) = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^3}(3x^2-1)$

$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{3} \Leftrightarrow x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$f'''(x) = \frac{2}{(x^2+1)^6}(6x(x^2+1)^3 - (3x^2-1) \cdot 3(x^2+1)^2 \cdot 2x)$

$= \frac{24x}{(x^2+1)^4}(1-x)^2$

$f'''\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{24(\pm\frac{1}{\sqrt{3}})}{(\frac{4}{5})^4} \cdot \frac{2}{3} \neq 0$.

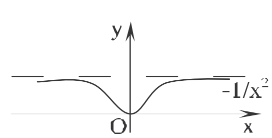
په نتیجه کې د f تابع په $x_{1,2} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$ کې د انعطاف نقطې لري .

15. مثال

$$f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} ; x \neq 0 \\ 0 \;\; ; x = 0 \end{cases}$$

په$\mathbb{R}$ کې مطالعه کړی.

پو هیږو چې $f'(0) = 0$ او د x≠ 0 له پاره $f'(x) = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$ دی او دلته د اکستریمم قیمت په توګه یوازې د $x_0 = 0$قیمت پیشنهاد کیږي . دا چې د هر n∈ℕ له پاره $f^{(n)}(0) = 0$ دی، نو د پورتنی دعوې په اساس د اکستریمم موجودیت نشو تثبیت کولی.څرنګه چې $e^{-\frac{1}{x^2}} \geq 0$; $\forall x \neq 0$ دی ، مومو چې په $x_0 = 0$ کې تابع یوه مطلق اصغري لري. (11) ش وګوری :



ش(11)

که لوړ مرتبه مشتقات په نظر کې و نیسو په دې صورت کې $f^{(n)}(x)$ د لاندې شکل لرونکی دی :

$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot R_n(x)$

او د اندکشن پواسطه د n≥ 1 له پاره پرته له دې چې د $R_n(x)$ په شکل باندې فکر وکړو لرو چې :

$R_{\mathbf{1}}(x)=\frac{2}{x^3}\ \ ;n=1$.

فرضوو چې چې د n≥ 1 له پاره

$f^{(n)}(x)=e^{-\frac{1}{x^3}}\cdot R_n(x)$

سم دی دی. نو

$$f^{(n+1)}(x)=(f^{(n)}(x))'=(e^{-\frac{\mathbf{1}}{x^2}}\cdot R_n(x))'$$

$$=e^{-\frac{1}{x^2}}\left(\frac{2}{x^3}R_n(x)+R_n'(x)\right)=e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot R_{n+1}(x)\ .$$

په همدا ډول د اندکشن په واســـــطه کولی شو ثبوت کاندو چې $f^{(n)}(0)=0$ دی. پوهیږو چې:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=\infty\ ;\ \ \alpha\in\mathbb{R}$$

یا

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^\alpha}{e^x}=0$$

نو

$$\Rightarrow\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^{2\alpha}}=0\ \Rightarrow\lim_{x\to 0}\ \frac{R_n(x)}{x}\cdot e^{-\frac{\mathbf{1}}{x^2}}=0$$

په نتیجه کې

$$f^{(n+1)}(x)\ \ =\lim_{x\to 0}\ \frac{f^{(n)}(x)-f^{(n)}(0)}{x}=\lim_{x\to 0}\ \frac{f^{(n)}(x)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x^2}}\cdot\frac{R_n(x)}{x}=0.$$ [33]

3. د مشتق تطبیق او کارونه

a. د توابعو اعظمي او اصغري نقطې

1. د لاندېنیو توابعو له پاره اعظمي او اصغري قیمتونه په لاس راوړی :

(i $\quad$ y= - x^2

(ii $\quad$ y=$(x-1)^2$

(iii) $\quad$ y=$\sqrt{25-4x^2}$

(iv $\quad$ y=$\sqrt{x-4}$

حل

i) د $y=-x^2$ تابع اعظمي قیمت صفر دی. ځکه چې په x=0 کې، y=0 کیږي.او پرته له دې $\forall\ x\neq 0$ له پاره $y<0$ کیږي.

ii) د تمرین په ډول.

iii) د $y=\sqrt{25-4x^2}$ تابع له پاره اعظمي قیمت په $(-2.5,2.5)$ انترول کې y=5 دی او د هر $x\subset(-2.5,2.5)$ له پاره y<5 کیږي.

iv) $y=\sqrt{x-4}$ له پاره $D_f=[4,\infty]$ دی او د $\forall x\subset D_f$ له پاره $f(x)\geq 0$ کیږي. نو f(x)=0 د تابع اصغري قیمت دی چې په x=4 کې په لاس راځي.

2. د $y=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ له پاره بحراني نقطې پیدا کړی.

حل

$$y'=f'(x)=x^2+x-6=0\Rightarrow x_1=-3\,;x_2=2$$

$\Leftarrow$ د تابع بحراني نقطې د $(2,\frac{2}{3})$ او $(-3,\frac{43}{2})$ څخه عبارت دي.

3. د $f(x)=x^4+2x^3-3x^2-4x+4$ تابع له پاره، دګراف د تزاید او تناقص انترولونه پیدا کړی.

حل

$$f'(x)=4x^3+6x^2-6x-4$$

$$\Rightarrow f'(x)=2(x+2)(2x+1)(x-1)=0$$

$$\Rightarrow x_1=-2,x_2=-\frac{1}{2}\,;x_3=1$$

$\Rightarrow f'(x)|_{x<-2}<0\Rightarrow$ f متناقص دی

$f'(x)|_{-2<x<-\frac{1}{2}}>0\Rightarrow$ f متزاید دی

$f'(x)|_{-\frac{1}{2}<x<1}<0\Rightarrow$ f متناقصه دی

$f'(x)|_{x>1}>0\Rightarrow$ f متزایده دی

4. معلوم کړی چې د $f(x)=x^3-8$ تابع اعظمي یا اصغري نلري.

حل

$$f'(x)=3x^2=0\Rightarrow x=0$$

د تابع بحراني نقطه (0,-8) ده او د هر $x\neq 0$ له پاره $f'(x)>0$ دی. په نتیجه کې تابع تل متزایده ده اعظمي او اصغري نقطې نلري. څرنګه چې $f''(x)|_{x=0}=6x=0$ او $f'''(0)\neq 0$ دی، نو (0,-8) یې د انعطاف نقطه ده.

5. د $f(x)=|x|$ له پاره اعظمي او اصغري نقطې پیدا کړی.

حل تابع په $x\neq 0$ کې قابل اشتقاق دی . د $\forall x < 0$ له پاره $f'(x) < 0$ او د $\forall x > 0$ پاره $f'(x) > 0$ دی. نو په x=0 کې تابع د اصغري نقطه لري او هغه د (0,0) څخه عبارت دی.

6. د120 عدد په دوو برخو داسې جلا کړی چې د هغوی د یوې برخې د ضرب حاصل د بلې برخې د مربع سره، اعظمي قیمت ولري.

حل که چیرې د 120 عدد یوه برخهx وي ، نو بله برخه یې 120-x ده. نو

$P=(120-x)\cdot x^2 \quad ; 0 \leq x \leq 120$

$\frac{dP}{dx} = 3x(80-x) = 0 \Rightarrow x = 0 \,; x = 80$.

په نتیجه کې (80,P(80)=(80,256000) او(0,P(0))=(0,0) د تابع بحراني نقطې دي او د اعظمي نقطې له پاره لرو چې:

$\frac{d}{dx}(\frac{dP}{dx}) = \frac{d^2P}{dx^2}|_{x=80} = (240-6x)|_{x=80} < 0 \Rightarrow$ د (80,256000) نقطه اعظمي نقطه ده

په نتیجه کې د 120 عدد دوهمه برخه به 120-80=40 وي.

7. د یوه لیکل شوي کاغذ سطح $2m^2$ ، د پورتنی او لاندینی حاشیې سور یې 0.21m او د څنډو د حاشیو سور یې 0.41m دی . د کاغذ د پاڼې بعدونه به څومره وي چې د پر لیکل پکې ځای شي.

حل که د پاڼې یو بعد x وي بل بعد یې $\frac{2}{x}$ دی. نو لیکل شوی مساحت (A) په لاندې ډول دی:

$A = (x - 0.82)\left(\frac{2}{x} - 0.42\right).$

$A = 2 - 0.42x - \frac{1.64}{x} + 0.3444$.

$\frac{dA}{dx} = -0.42 + \frac{1.64}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \frac{1.64}{x^2} = 0.42 \Rightarrow \frac{x^2}{1.64} = \frac{1}{0.42} \Rightarrow x^2 \cong 3.904 \Rightarrow x_1 \cong 1.97$

څرنګه چې

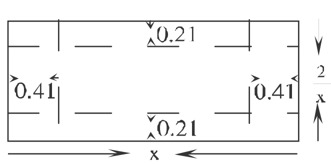
$\frac{d^2A}{dx^2}|_{x_1\cong 1.97} = (-2\cdot 1.64 \cdot \frac{1}{x^3})|_{x_1=1.97} < 0$

نو یوازینی قیمتونه د حاشیو له پاره ، چې د پر لیکل پکې ځای شي $x_1 = 1.97$ او $x_2 = \frac{2}{x} = 1.01$ دي،

چې په دې صورت کې

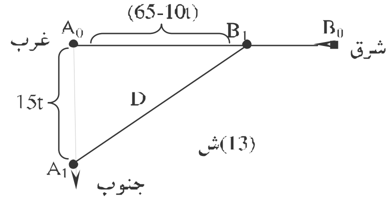
$A=(1.97-0.82)(1.01-0.42)=1.15\cdot 0.59 \cong 0.67m^2$

په لاس راځي.



(12)ش

8. د B کشتۍ د 65km په فاصله د A کشتۍ په شرق کې، د سهار په 9 بجو کې ولاړه ده. د B کشتۍ د غرب په لور د 10km/h او د A کشتۍ د جنوب په لور د 15km/h په سرعت حرکت کوي. که چېرې دوی دواړه خپلو حرکتونو ته دوام ورکړي ،د کوم وخت وروسته به دواړه کشتۍ په ډېره کمه فاصله یو د بل څخه تېرې شي. (13) ش وګوری.



حل که د دواړو کشتیو موقعیت د $9^{00}AM$ په شاوخوا کې په A_0 او B_0 او د t ساعت وروسته په A_1 او B_1 سره وښیو ، نو د دوی له خوا به طی شوي مسافه د t په وخت کې په ترتیب سره $10\cdot t\ km$ او $15\cdot t\ km$ وي، نو د دوی تر منځ د D فاصله په لاندې ډول ده.

$$D^2=(15t)^2+(65-10t)^2=(15t)^2+4225-1300t+100t^2$$
$$D^2=325t^2-1300t+4225\ .$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt}=2D\cdot\frac{dD}{dt}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dD}{dt}=\frac{650t-1300}{2D}=\frac{325t-650}{D}=0$$

$$\Rightarrow 325t-650=0 \Rightarrow t=2.$$

دلته که $t<2$ وي، $\frac{dD}{dt}<0$ او که $t>2$ وي $\frac{dD}{dt}>0$ کیږي.په نتیجه کې د D فاصله په $t=2$ کې کمترینه فاصله ده.او هغه

$$\Rightarrow t=2; D^2=(15t)^2+(65-10t)^2 \Rightarrow D=15\cdot\sqrt{13}=54.08km.$$

کیږي .

9. یو استوانه ئي کانتینرچې دایروي قاعده لري ،حجم یې $64m^3$دی. د هغې د سطحې د فلز مساحت معلوم کړی چې کوچنې مساحت ولري.

i) د کانتینر سر خلاص دی.

ii) کانتینر د سر له خوا تړلی دی.

حل فرض کوو چې د کانتینر د قاعدې شعاع r او لوړوالی یې h دی.که د کانتینر د سطحې د فلز مساحت په A او د کانتینر حجم په V سره وښیو . لیکو چې:

$$V=\pi r^2h=64\ ;\ \ A=2\pi rh+\pi r^2$$

$$\Rightarrow h=\frac{64}{\pi r^2} \Rightarrow A=2\pi r\cdot\frac{64}{\pi r^2}+\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = -\frac{128}{r^2} + 2\pi r = \frac{2(\pi r^3 - 64)}{r^2} = 0 \Rightarrow r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}.$$

يعنې په $r = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ کې بحراني قيمت په لاس راځي.
څرنګه چې

$$h = \frac{64}{\pi r^2} = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}} \Rightarrow r = h = \frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$$

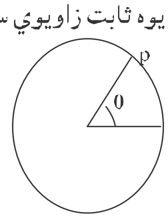
کيږي. دلته د $\frac{dA}{dr}$ قيمت د $\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ په چپ خوا کې منفي او په ښي خوا کې مثبت دی ، نو د اول مشتق د ازمايش له مخې د $r=h=\frac{4}{\sqrt[3]{\pi}}$ په قيمت کې کانتينر د کوچني مساحت لرونکی دی.
(ii)(کورنی دنده)

b. مستقيم الخط حرکتونه

د يوه نقطوي جسم حرکت د يوه مستقيم خط په امتداد د S=f(t) معادلې په واسطه بيانوواو S د P نقطوي جسم په واسطه طی شوي فاصله د t په وخت کې د O يوې ثابتې نقطې څخه چې په يوه معلوم مسير ئې طی کوي راښئي. دP جسم سرعت د t په وخت کې $v = \frac{dS}{dt}$ دی. که v>0 وي نو د Pجسم حرکت د تزايد او د v<0 په حالت کې .دP جسم حرکت د سستيدو په حال کې دی.د P جسم د حرکت تعجيل د t په وخت کې د $a=\frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$ سره مساوي دی .که a>0 وي vمتزايد او که a<0 وي v متناقص دی.يا په بل عبارت که چيرېv او a يو رنګ علامې ولري، د P جسم سرعت ګړندی (متزايد) او که مختلفې علامې ولري، دP جسم سرعت سستيدونکی (متناقص) دی.

c. دايروي حرکت

د P جسم حرکت په دايروي مسير باندې د $\theta = f(t)$ معادلې په واسطه ښودل کيږي. دلته مرکزي زاويه (θ)(د راديان له جنسه)ده، چې د جسم د دوران څخه د t په وخت کې د دايرې د مرکز د وصل کيدو څخه په لاس راځي. د P جسم زاويوي سرعت د t په وخت کې $\frac{d\theta}{dt}$ ω اوزاويوي تعجيل $a = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$ کيږي.
که چيرې د هر t له پاره a=const وي، په دې صورت کې دP جسم په يوه ثابت زاويوي سرعت حرکت کوي او يوازې په جهت کې يې تغير راځي



ش(14)

10. يو جسم د يوه مستقيم خط په امتداد د $s(t)=\frac{1}{2}t^3 - 2t$ معادلې په اساس حرکت کوي .د هغې تعجيل او سرعت د دوهمې ثانيې په اخير کې پيدا کړی.

$$v = \frac{dS}{dt} = \frac{3}{2}t^2 - 2 \Rightarrow v|_{t=2} = \frac{3}{2}(2)^2 - 2 = 4\frac{m}{sec} \quad .$$

$$a = \frac{d^2S}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 3t \Rightarrow a|_{t=2} = 3 \cdot 2 = 6m/sec^2 \quad .$$

11. یو جسم د یوه مستقیم خط په امتداد د $S(t)=t^3 - 6t^2 + 9t + 4$ معادلې په واسطه حرکت کوي.

i) S او a(تعجیل) معلوم کړی، په هغه صورت کې چې v=0 وي.

ii) S او v معلوم کړی، په هغه صورت کې چې a=0 وي.

iii) کوم وخت S متزاید دی.؟

iv) کوم وخت v متزاید دی؟

v) کوم وخت د حرکت جهت تغیر کوي.؟

حل

$v = \frac{dS}{dt} = 3t^2 - 12t + 9 = 3(t-1)(t-3)$.

$a = \frac{dV}{dt} = 6(t-2)$.

i) $v=0 \Rightarrow t = 1 \; ; \; t = 3 \Rightarrow S|_{t=1} = 8 \; ; \; a\,|_{t=1} = -6$.

ii) $a = 0 \Rightarrow 6(t-2) = 0 \Rightarrow t = 2 \; ; \; S|_{t=2} = 6 \; ; \; V|_{t=2} = -3$

iii) $v > 0 \Rightarrow t < 1 \; \vee \; t > 3 \Rightarrow$ S تزاید کوی

iv) $a > 0 \Rightarrow t > 2. \;\Rightarrow$ v تزاید کوي

v) د حرکت جهت تغیر کوي که v=0 او $a \neq 0$ وي. د i) څخه پو هیږو چې که t=1 او t=3 وي ،د حرکت جهت تغیر کوي.

12. یو جسم په دایروي شکل سره د ساعت ستنې د دوران په خلاف جهت د $\theta(t) = \frac{t^3}{50} - t$ معادلې له مخې حرکت کوي. داسې چې θ په رادیان او t په ثانیه اندازه کیږي. د جسم په واسطه دبې ځایه کیدو زاویه (θ)، زاویوي سرعت (ω) او زا ویوي تعجیل د لسمې ثانیې په پای کې په لاس راوړی.

حل

$\theta|_{t=10} = \frac{t^3}{50} - t = \frac{1000}{50} - 10 = 10 \text{ rad}$

$\omega\,|_{t=10} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{3t^2}{50} - 1 = \frac{3\cdot 100}{50} - 1 = 6 - 1 = 5\frac{rad}{sec}.$

$\frac{d\omega}{dt} = \frac{6t}{50} rad/sec^2 = \frac{6\cdot 10}{50} rad/sec^2 = 1.2\, rad/sec^2$

d. د تغیراتو اړیکې (Related rates)

که د x یو کمیت د وخت تابع وي ،نو د x د تحول مقدار د وخت په یوه واحد کې په $\frac{dx}{dt}$ سره ښودل کیږي. کله که دوه یا زیات کمیتونه راکړل شوي وي او د وخت تابع وي، نود تابع د تغیراتو رابطه د دوویا زیاتوکیمیتونو په نظر کې نیولو سره د مشتق څخه په لاس راځي.

13. یو گاز د کروي بالون څخه د $0.02m^3/sec$ په سرعت خارجیږي. د بالون سطحې د مساحت تغیر $(\frac{ds}{dt})$ د وخت په یوه واحد کې پیدا کړی، په دې شرط چې د بالون شعاع 4m وي.

حل فرض کوو چې د t په وخت کې د بالون شعاع r ، حجم یې $v=\frac{4}{3}\pi r^3$ او د سطحې مساحت یې $s=4\pi r^2$ دی.

څرنګه چې $\frac{dV}{dt} = -0.02m^3/sec$ دی. لرو چې:

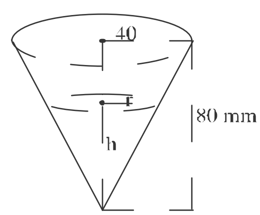
$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \cdot \frac{dr}{dt} \; ; \; \frac{ds}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{dr}{dt} \quad .$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{dV/dt}{4\pi r^2} = \frac{-0.02}{4\pi r^2} \quad .$$

$$\frac{ds}{dt} = \frac{8\pi r}{1} \cdot \frac{dr}{dt} = 8\pi r \cdot \frac{-0.02}{4\pi r^2} = \frac{2}{r}(-0.02) \quad .$$

$$\frac{ds}{dt}|_{r=4} = \frac{2}{4}(-0.02) = -0.01m/sec \qquad .$$

14 . د یوه قیف شکله لوښي څخه د $1000mm^3/sec$ په سرعت سره اوبه توئیږي. که چیرې د قیف د قاعدې شعاع 40mm او ارتفاع 80mm وي د اوبو سطحې د ټیټیدو سرعت$(\frac{dh}{dt})$ په هغه وخت کې معلوم کړی، چې په هغه کې د اوبو سطح د پورتنی سطحې څخه 20mm را کوزه شي.



ش(15)

حل فرضوو چې r د قاعدې شعاع ،h د قاعدې ارتفاع او v د مخروط (قیف) حجم د t په وخت کې دی. د (15) شکل څخه د مثلثونو د تشابه له مخې لیکو چې:

$$\frac{r}{40} = \frac{h}{80} \Rightarrow r = \frac{1}{2} \cdot h \quad .$$

همدارنګه لیکو چې

$$v = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{4}h^2\right) \cdot h = \frac{1}{12}\pi h^3 \quad .$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dh} = \frac{1}{4}\pi h^2 \frac{dh}{dt} \ .$$

دا چې، $h = 80 - 20 = 60$; $\frac{dV}{dt} = -1000$ دی. نو

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\frac{dV}{dt}}{\frac{1}{4}\pi h^2} = \frac{4\cdot\frac{dV}{dt}}{\pi h^2} = \frac{4\cdot(-1000)}{\pi(60)^2} = -\frac{10}{9\pi} mm/sec.$$

15. د یوه مستطیل دوې موازي ضلعې د 20mm/sec په اندازه زیاتیږي او نورې دوې موازي ضلعې یې په داسې ډول کمیږي چې د مستطیل مساحت د $A=5000mm^2$ په اندازه ثابت پاتې کیږي. د مستطیل د کمیدونکي ضلع د تحول مقدار($\frac{dy}{dt}$) پیدا کړی.

i) چې د زیاتیدونکي ضلعې اوږدوالی یې 50mm وي.

ii) چې د زیاتیدونکي ضلعې اوږدوالی یې 100mm وي.

حل فرضوو چې د زیاتیدونکي ضلعې اوږدوالی دا په وخت کې x او د کمیدونکي ضلعې اوږدوالی y دی.نو:

$$P=2(x+y) \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2\left(\frac{dx}{dt} + \frac{dy}{dt}\right) \ .$$

$$A=x\cdot y = 5000 \Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\cdot\frac{dy}{dt} + y\cdot\frac{dx}{dt} = 0 \qquad (i$$

$$x=50\ ;\ y=100 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 20mm/sec \ .$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = x\cdot\frac{dy}{dt} + y\cdot\frac{dx}{dt} = 0 = 50\cdot\frac{dy}{dt} + 100\cdot 20 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -40\ ;\ \frac{dP}{dt} = 2(20-40) = -\frac{40mm}{sec}\ (decreasing).$$

$$x=100\ ;\ y=50\ ;\ \frac{dx}{dt} = 20\,mm/sec \qquad (ii$$

$$\Rightarrow 100\cdot\frac{dy}{dt} + 50\frac{dx}{dt} = 100\cdot\frac{dy}{dt} + 50\cdot 20 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dt} = -10 \Rightarrow \frac{dP}{dt} = 2(20-10) = 20mm/sec \quad (increasing) \quad . \quad [25]$$

e. د هوپیتال(De L' *Hospital*) قاعدې

ډېر ځلې د توابعو د ځینو لیمېټونو($\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$)د پیدا کولو په وخت کې دځینو پرابلمونو سره مخامخ کیږو، داسې چې f(x) او g(x) دواړه "0" یا "∞" ته تقرب کوي.د دا ډول لیمېټونو له پاره په مشتق کې ځنې قاعدې موجودې دي چې د **de,L.Hospital**[8] او **G.Bernoulli**[9] قاعدو په نوم یادیږي:

[8] L`Hospital (1661-1704) فرانسوی ریضي دان.

10.5 دعوی

فرضوو چې f او g تابع ګانې په $[a,b]$ کې متمادي او (a,b) کې د اشتقاق وړ دي ،داسې چې د هر $\forall x\epsilon(a,b)$ له پاره $g'(x)\neq 0$ وي . نو که چېرې f(b) = g(b)=0 او $\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود وي په دې صورت کې $\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ کیږي .

ثبوت

د $x\in(a,b)$ له پاره د وسطي قیمت دوهمې دعوې په اساس یو $c\epsilon(a,b)$ شته چې د هغې له پاره $\frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ صدق کوي.څرنګه چې f(b)=g(b)=0 دی، نو $\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}$ کیږي . دا چې x<c<b دی ، نو

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^-}\frac{f'(c)}{g'(c)}\ .$$

په دې ترتیب سره د ښي طرف لیمیټ له پاره هم لرو چې.

$$\lim_{x\to b^+}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to b^+}\frac{f'(c)}{g'(c)}\qquad [33]\blacksquare$$

16. مثال

پو هیږو چې $\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=1$ دی.

دا چې صورت او مخرج دواړه د $x\to 0$ په حالت کې د$\frac{0}{0}$شکل لري ، نو د پورتنی دعوې د تطبیق په اساس لرو چې

$$\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}}{1}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1\ .$$

17. مثال د $b\epsilon\mathbb{R}^+$ له پاره $\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=lnb$ دی. د(10.5دعوې) په اساس لیکو چې :

$$\lim_{x\to 0}\frac{b^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{b^x\cdot lnb}{1}=lnb\ .$$

یادونه د لیمیټ اخیستلو په پروسه کې کولی شو چې په مکرره توګه د **de** $L'Hospital$ قاعدو څخه د ضرورت په وخت کې کار واخلو. د مثال په ډول

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2}=\frac{1}{2}$$

همدارنګه پوهیږو چې $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ دی او د 10.5دعوې د تطبیق څخه په تکراري ډول هم پورتنی لیمیټ په لاس راځي. یعنې:

---

[9] Jacques Bernoulli (1654-1705) سویسی ریاضي دان.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{ln(1+x)^{\frac{1}{x}}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}ln(1+x)} = e^{\lim_{x\to 0}\frac{ln(1+x)}{x}} = e^1 = e$$

پورتنی مثال دا هم رانښئي ،چې که د "$\frac{0}{0}$" شکل موجود نه وی ، بیا هم د ځینو ریاضیکي عملیو په نتیجه کې د $\frac{0}{0}$ یو منا سب شکل په لاس راوړلی شو.

11.5 دعوی

که چېرې f او g په (a,∞) کې د اشتقاق وړ، $g'(x) \neq 0$ او برسېره پردې

$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. او $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود وي ، نو $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

ثبوت

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f(\frac{1}{t})}{g(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^-}\frac{(-\frac{1}{t^2})\cdot f'(\frac{1}{t})}{(-\frac{1}{t^2})\cdot g'(\frac{1}{t})} = \lim_{t\to 0^+}\frac{f'(\frac{1}{t})}{g'(\frac{1}{t})} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} \ \blacksquare.$$

دوهم حالت $\frac{\infty}{\infty}$

دلته غواړو چې یوه بله دعوی چې د ***L' Hospital*** د دوهمې دعوې په نوم یادیږي په ثبوت ورسوو.

12.5 دعوی

که چېرې دf او g تابع ګانې په (a,b) کې د اشتقاق وړ ، د هر $x\epsilon(a,b)$ له پاره $g'(x) \neq 0$ او برسېره پردې
که $\lim_{x\to b^-} f(x) = \lim_{x\to b^-} g(x) = \infty$ او $\lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ موجود وي، په دې صورت کې

$$\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)} \quad .$$

ثبوت

د $a< x_1 <x<b$ له پاره یو $c\epsilon(x_1,x)$ موجود دی چې

$$\frac{f(x)-f(x_1)}{g(x)-g(x_1)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad .$$

که چېرې $\Lambda := \lim_{x\to b^-}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ وضع کړو په دې صورت کې $\forall\varepsilon \in \mathbb{R}$ د له پاره د x_1 یو عدد انتخاب کولی شو داسې چې :

$$\forall x \in (x_1, b) \quad \left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon \ .$$

بنا پردې

$$\Lambda\text{-}\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)}\cdot\frac{1-\frac{f(x_1)}{f(x)}}{1-\frac{g(x_1)}{g(x)}} < A + \varepsilon \ .$$

$$\Rightarrow A-\varepsilon \leq \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} \leq A+\varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = A = \lim_{x\to b^-} \frac{f'(x)}{g'(x)}\ . \ \blacksquare$$

18. مثال

(i
$$\lim_{x\to\infty} \frac{lnx}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0$$

ii) د $n\in\mathbb{N}$ له پاره لیکو چې:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{n(n-1)x^{n-2}}{e^x} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0\ .$$

په اکثرو حالتونو کې که تابع د $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ شکل و نه لري د ځینو ریاضیکي عملیو په کومک هغه د $\frac{f(x)}{g(x)}$ په شکل اړولی شو.

دریم حالت $0\cdot\infty$

دلته د $f(x)\cdot g(x)$ شکل ، د $\frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}}$ یا $\frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$ په څېر د مطالعې لاندې نیول کیږي.

19. مثال

$$\lim_{x\to 0^+} (x\cdot lnx) = \lim_{x\to 0^+} \frac{lnx}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-ln\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} \left(-\frac{x^2}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0\ \ .$$

څلورم حالت

$\infty-\infty$ دلته د $f(x)-g(x)$ په عوض د $\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}\cdot\frac{1}{f(x)}}$ شکل په نظر کې نیسو .

20. مثال

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}\ \ .$$

$$= \lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x}{2e^x+xe^x}\right) = \frac{1}{2}\ \ .$$

پنځم حالت $\infty^0, 1^\infty, 0^0$ شکلونه

په دې حالت کې د $f(x)^{g(x)}$ په عوض د $e^{g(x)\cdot lnf(x)}$ شکل مطالعه کوو.

21. مثال

$$\lim_{x\to 0} x^x = \lim_{x\to 0} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0} x\cdot \ln x} = e^0 = 1 \ . \qquad (i$$

$$\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} e^{\frac{1}{x}\ln x} = e^{\lim_{x\to\infty}(\frac{1}{x}\cdot \ln x)} = e^{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}} = e^0 = 1 \ . \qquad (ii$$

خصوصاً که چېرې $x = n \in \mathbb{N}$ انتخاب شي، نو.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = 1 \ . \qquad (iii$$

$$\lim_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}} == e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{1-x}\ln x} = e^{\lim_{x\to 1}(\frac{\ln x}{1-x})} = e^{\lim_{x\to 1}(\frac{-1}{x})} = e^{-1} = \frac{1}{e} \ . \qquad (iv$$

22. مثال

وښئی چې $2 < e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$ دی.

حل

د بینوم دعوې د n مثبتو تامو عددونو دتطبیق په اساس لیکو چې:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \ \dots\dots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots 1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=1+1+(1-\frac{1}{n})\cdot\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\frac{1}{3!} + \cdots + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\dots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n!} \ .$$

معلومیږي چې پورتنی رابطه $\forall n \neq 1$ له پاره $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n > 2$ دی. همدارنګه که په پورتنی رابطه کې د $(1-\frac{1}{n}), (1-\frac{2}{n}), \dots$ په عوض لوی عدد یعنې (1) وضع شي لاندې رابطه په لاس راځي:

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \ .$$

خکه چې $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$ دی.

$$\Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} \ .$$

څرنګه چې $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}} + \dots < 1$ دی. نو

$$(1+\frac{1}{n})^n < 2 + 1 \Rightarrow (1+\frac{1}{n})^n < 3.$$

$$\Rightarrow 2 < (1+\frac{1}{n})^n < 3 \ .$$

اوس که چېرې $n \to \infty$ شي، نو: $(1-\frac{1}{n})^n \to 1 \ ; \ (1-\frac{2}{n})^n \to 1$ کیږي. لرو چې:

$$(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots\left(1-\frac{k}{n}\right)\cdot\frac{1}{(k+1)!} \to \frac{1}{(k+1)!}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!} \cong 2.7182\ldots \quad [16]$$

4. تمرین

1. د لاندینیو تابعو له پاره اعظمي مطلق ، اعظمي موضعي،اصغري مطلق او اصغري موضعي پیدا کړی.

$f(x)=8-3x \ ; \ x\geq 1$ (i

$f(x)= x^2 \ ; \ 0<x<2$ (ii

$f(t)=\frac{1}{t} \ ; \ 0<t<1$ (iii

$f(x)=\begin{cases}1-x \ ; \ 0\leq x<2 \\ 2x-4 \ ; \ 2\leq x\leq 3\end{cases}$ (iv

2. د لاندینیو تابعو له پاره په راکړل شویو انترولونو کې اعظمي مطلق او اصغري مطلق پیدا کړی.

$f(x)= 3x^2 - 12x+5 \ ; [0,3]$ (i

$f(x) = x^3-3x+1 \quad ; [0,3]$ (ii

$f(x) = \frac{x}{x^2+1} \quad ; [0,2]$ (iii

3. کهaاوb مثبت عددونه وي د $f(x)=x^a(1-x)^b$ تابع اعظمي او اصغري مطلق په $0\leq x \leq 1$ کې پیدا کړی.

4. د 1kg اوبو حجم په سانتي متر مکعب سره د 0^oاو 30^o تر منځ د لاندې فرمول په واسطه راکړل شوی دی.

$V=999.87-0.06426\,T+0.0085043\,T^2-0.0000079T^3$

د حرارت هغه درجه پیدا کړی چې په هغه کې اوبه د اعظمي کثافت لرونکي وي.

5. ثبوت کړی چې د $x^3+x-1 = 0$ معادله یوازې یو حقیقي جذر لري.

6. $f(x)=1-x^{\frac{2}{3}}$ درکړل شوی دی.

(a) وښیی چې $f(1) = f(-1)$ دی.

(b) وښیی چې د c عدد د 1 او1- تر منځ کې وجود نه لري چې د هغې له پاره $f'(c) = 0$ شي .دا هم ووایی چې ولې دا بیان د Rolle دعوې سره په تضاد کې دی .؟

7. وښیی چې د $f(x)=\tan x$ له پاره $f(0)=f(\pi)$ او د c عدد د $(0,\pi)$ تر منځ وجود نه لري چې $f'(c)=0$ شي. ووایی چې دا بیان ولې د Rolle دعوی سره په تضاد کې دی؟

8. که$f(x)=(x-3)^2$ وي . وښیی چې د $(1,4)$ انترول تر منځ د c داسې عددوجود نه لري چې هلته د $f(4)-f(0)= f'(c)(3-0)$معادله صدق وکړي .او ولې دا بیان د متوسط قیمت دعوې سره په تضاد کې دی .؟

9. د یو موټر د سرعت کیلومتر په 2:00 PM کې 50 km/h او په 2:10 PM کې 65 km/h رابنیي . وښیی چې د 2:PM او 2:10 PM تر منځ به په ځینو و ختونو کې د موټر تعجیل په یقیني توګه 90 km/h^2 وي .

10. د a عدد ته د f تابع مستقره نقطه ویل کیږي که a = f(a) صدق وکړي . که چیرې د هرحقیقي عدد x له پاره $f'(x) \neq 1$ وي ، ثبوت کړی چې یوازې یوه مستقره نقطه وجود لري .

د لاندینیو توابعو له پاره د تزاید او تناقص انټرولونه پیدا کړی .

11. $f(x) = \frac{x^2}{x^2+3}$

12. $f(x) = 4 - 2x^2 + 3$

13. $f(x) = e^{2x} + e^{-x}$

14. فرض کوو چې f'' د $(-\infty, \infty)$ په انټرول کې متمادي دی .

(a) که $f'(2) = 0$ او $f''(0) = -5$ وي د f په اړه څه ویلی شئ .؟

(b) که $f'(6) = 0$ او $f''(6) = 0$ وي د f په اړه څه ویلی شئ .؟

15. د $f(x) = x^2 \cdot e^x$ تابع له پاره اعظمي موضعي ، اصغري موضعي او د انعطاف نقطې پیدا کړی

16. $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2}{x^3}$

17. $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x^3}$

18. $\lim_{x \to 1} \frac{x^a - 1}{x^b - 1}$

19. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{\pi x}$ .6

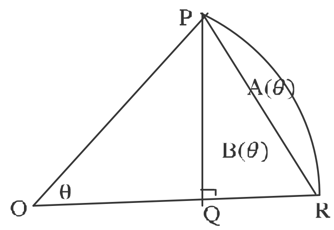
20. $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln(\ln x)}{x}$

21. $\lim_{x \to \infty} x \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$

22. $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}}$

23. $\lim_{x \to 1} \frac{\ln x)}{\sin \pi x}$

24. د شکل له مخې د دايرې يوه قطاع چې مرکزي زاويه يې θ ده ،په نظر کې ونيسی. که $A(\theta)$ د PR وتر او PR قوس تر منځ مساحت او $B(\theta)$ د PQR مثلث مساحت وي، $\lim_{\theta\to\theta}\frac{A(\theta)}{B(\theta)}$ پيدا کړی .



16ش)

25. که f' متمادي، $f(2)=0$ او $f'(2) = 7$ وي ، $\lim_{x \to 0}\frac{f(2+3x)+f(2+5x)}{x}$ پيدا کړی .

26. که f' متمادي وي ،د لوپيتال د قاعدو له مخې ثبوت کړی چې

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} = f'(x)$$

27. که f'' متمادي وي، ثبوت کړی چې

$$\lim_{h \to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2} = f''(x)$$

شپږم فصل

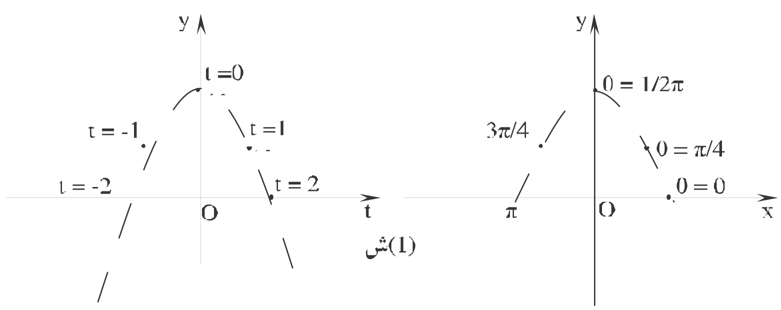
پارامتریکې معادلې اوقطبي مختصات

1. پارا متریکې معادلې

که چیرې د P نقطې د (x,y) مختصه د تابع په شکل د یوه دریم متحول(u) یعنې د $x=f(u);y=g(u)$ تابع وي په دې صورت کې $x=f(u)$او $y=g(u)$ ته د منحنې پارامتریکې معادلې نظر u پارامتر ته ویل کیږي. د مثال په توګه د $y=4sin^2\theta$; $x=cos\theta$ معادلې د $4x^2+y=4$ پارابول له پاره پارامتریکې معادلې نظر د θ پارامتر ته دي.ځکه چې $4x^2+y=4cos^2\theta+4sin^2\theta=4(cos^2\theta+sin^2\theta)=4$ کیږي.
د $x=\frac{1}{2}t$ ، $y=4-t^2$ معادلې هم د پورتنی پارابول له پاره پارامتریکې معادلې نظر د t پارامتر ته دي. ځکه چې

$$4x^2+y=4(\frac{1}{2}t)^2+4-t^2=4\cdot\frac{1}{4}t^2+4-t^2=4\,.$$

دا هم باید ووایو چې لومړی پارامتریکې معادلې د یوې منحنې یوازې یوه برخه راښئي ولې دوهمه پارامتریکه معادلې د یوې منحنې د مکملې برخې ښخه نمایندګي کوي. (1) ش



ش(1)

د پارابول مکمله برخه

د پارابول یوه برخه

همدارنګه $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ د $x^2+y^2=r^2$ دایرې پارامتریکې معادلې نظر د θ پارامتر ته دي . ځکه چې:

$$x^2+y^2=(rcos\theta)^2+(rsin\theta)^2$$

$$=r^2cos^2\theta+r^2sin^2\theta=r^2(cos^2\theta+sin^2\theta)=r^2\,.$$

$$\Rightarrow x^2+y^2=r^2\,.$$

برسېره پر دې د $x=a+r\cos\theta$ ، $y=b+r\sin\theta$ د هغې دایرې پارامتریکې معادلې دي چې شعاع ئې r او مرکز ئې په (a,b)کې دی.ځکه چې :

$$(x-a)^2+(y-b)^2=(a+r\cos\theta-a)^2+(b+r\sin\theta-b)^2$$
$$=\ r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta=r^2\ .$$

1. مثال

کومه یوه منحني په لاندینیو پارامتریکو معادلو پورې اړه لري :

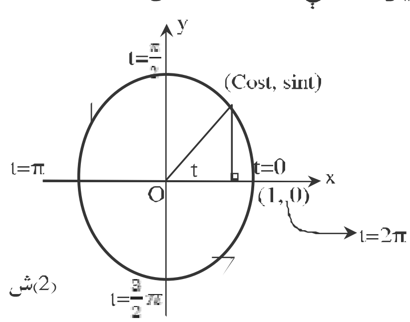
x=cost : y= sint ; $0\le t\le 2\pi$

حل

که چېرې موږ د x او y مختصې د t له جنسه په نظر کې ونیسو معلومیږي د هغې منحني دایره ده ځکه چې

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1\ .$$

بنا پردې د (x,y) نقطې حرکت د یوې واحدې دایرې پر مخ باندې دی او t د یوې زاویې اندازه په رادیان باندې راښئي. که t د 0 څخه تر 2π پورې تزاید وکړي د (x,y)=(cost,sint) نقطه یو ځلې د دایرې په چاپېر د ساعت د ستنې په خلاف لوري را څرخي . چې د پیل نقطه ئې (1,0) ده .(2) ش



(2ش

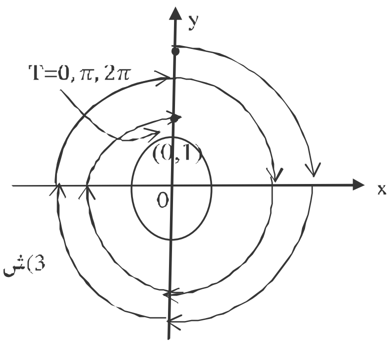
2. مثال

د x= sin 2t ; y=cos 2t پارامتریکې معادلو پورې اړوند ، منحني مشخصه کړی .

حل لروچې :

$$x^2+y^2=\cos^2 2t+\sin^2 2t=1$$

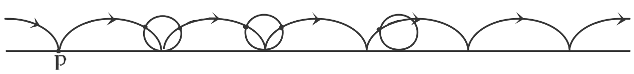
پورتنی پارامتریکې معادلې بیا هم په یوه واحده دایره پورې اړه لري .په دې ځای کې که t د 0 څخه تر 2π پورې زیات والی وکړي نو د (x,y)=(sin2t,cos2t) نقطه د (0,1) نقطې څخه د دایرې په چاپېر دوه ځلې د ساعت ستنې په خلاف لوري را څرخي .(3) ش



ش(3)

3. مثال

دP نقطه د دايرې په محيط باندې پرته ده . که دايره د يوه مستقيم خط په امتداد و لغړيږي هغه منحني چې د P نقطې د لغړيدو په صورت کې په لاس راځي د سيکلوئيد (cycloid) په نوم يادېږي (4) .ش

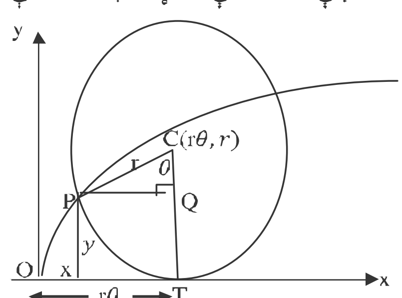


ش(4)

نو که دايره د r شعاع ولري او د x په جهت د مبدا څخه ولغړيږي د هغې دP نقطې د حرکت څخه سايکلويئد په لاس راځي او پارامتريکې معادلې يې په لاندې توګه په لاس راوړو .

حل مورږ د پارامتر په توګه θ (دوران زاويه) انتخاب کوو . فرضوو چې د $\theta = 0$ په حالت کې د P نقطه په مبدا کې ده او دايره د θ راديان په اندازه لغړيدلې ده . په دې حالت کې د دايرې د تماس نقطه د x په محور T بولو .نو هغه فاصله چې دP نقطه ئې د لغړيدو په حالت کې د مبدا څخه طی کوي

$|OT| = arc\,PT = r\cdot\theta$ کیږي .



ش(5)

له دې وجې د د دايرې د مرکز مختصه $C(r\theta, r)$ کيږي .نو که دP نقطې مختصه (x,y) وي، د (5)ش له مخې لرو چې :

x=$|OT|-|PQ|=r\theta-rsin\theta=r(\theta-sin\theta)$

y=$|TC|-|QC|=r-rcos\theta=r(1-cos\theta)$.

په نتیجه کې د سیکلوئید پارامتریکې معادلې د

x= $r(\theta-sin\theta)$; y= $r(1-cos\theta)$

څخه عبارت دي او$\theta \in \mathbb{R}$ دی .

2. د پارامتریکوتابع ګانو مشتق

په 1.6 کې مو د پارامتریکې معادلو په اړه پوره معلومات تر لاسه کړل او دا مو هم زده کړل چې که د هغې څخه د t پارامتر له منځه یوسو د هغې څخه د (x) y=F تابع په لاس راځي او په اسانی سره د هغې څخه د y مشتق نظر د x ته په لاس راوړلی شو . نو که موږ x=f(t);y=g(t) د (x) y=F په معادله کې کېږدو د هغې څخه د g(t)=F (f(t)) معادله حاصلیږي .دا چې f,gاوF د اشتقاق وړ دي او د مشتق د زنځیري قاعدې په نظرکې نیولو سره لیکو چې :

$$g'(t)=F'(f(t))\cdot f'(t)=F'(x)\cdot f'(t)$$

که $\mathbf{f'(t)\neq 0}$ وي، نو

$$F'(x)=\frac{g'(t)}{f'(t)} \qquad \dots \qquad (1)$$

دا چې د y=F(x) منحني میل د (x,F(x)) په نقطه کې$F'(x)$ دی او (1) معادله موږ ته ددې توان راکوي چې د y=F(x) منحني میل بې له دې چې د t پارامتر له منځه یوسو په لاس راوړو . یعنې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \;;\; \frac{dx}{dt}\neq 0 \qquad \dots \qquad (2)$$

په (2) رابطه کې دا هم لیدل کیږي چې که $\mathbf{0}=\frac{dy}{dt}$ او$\frac{dx}{dt}\neq\mathbf{0}$ وي نو د y=F(x)منحني له پاره افقي مماس او د $\frac{dx}{dt}=\mathbf{0}$ ، $\frac{dy}{dt}\neq\mathbf{0}$ په حالت کې عمودي مماس حاصلیږي.همدارنګه د$\frac{d^2y}{dx^2}$ موندلو له پاره لرو چې:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} \quad [12]$$

4. مثال

د C یوه منحني د $x=t^2$ او $y=t^3-3t$ پارامتریکې معادلو په واسطه راکړل شویده .

(a) وښئی چې د C منحني د (3,0) په نقطه کې د دوو مماسونو لرونکي ده او د هغې معادلې په لاس راوړی .

(b) د C منحني هغه نقطې پیدا کړی چې په هغه کې منحني د افقي یا عمودي مماس لرونکي وي .

(c) د منحني ښکته او پورته خواته مقعریت معلوم کړی .

(d) د C منحني ګراف رسم کړی .

حل

a) پوهیږو چې:

$$y=t^3-3t=t(t^2-3)=0$$

$$\Rightarrow t=0 \ \lor \ t=\pm\sqrt{3}\ .$$

نو د (3,0) نقطه د C په منحني باندې د $t=\sqrt{3}$ او $t=-\sqrt{3}$ په قیمتونو کې په لاس راځي. یعنې د C منحني په خپله د (3,0) په نقطه کې سره قطع کوي .همدارنګه لرو چې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{3t^2-3}{2t}=\frac{3}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\ .$$

او د مماس میل د $t=\pm\sqrt{3}$ په نقطه کې

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(-\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\sqrt{3} \quad \text{او} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}\left(\sqrt{3}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\sqrt{3}$$

کیږي .دلته د $t=\pm\sqrt{3}$ په قیمتونو کې د مماس دوه میلونه په لاس راځي او له دې وجې دوه مماسونه هم موجود دي چې معادلې ئې په لاندې ډول دي:

$$y=\sqrt{3}(x-3)\ .$$

$$y=-\sqrt{3}(x-3)\ .$$

b) د C منحني د افقي مماس لرونکي ده که $\frac{dy}{dx}=0$ شي. یعنې که $\frac{dx}{dt}\neq 0$ او $\frac{dy}{dt}=0$ وي .

ځرنګه چې$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3$ کیږي لیکو چې:

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3 \Rightarrow t^2 = 1 \Rightarrow t = \pm 1 .$$

نو د (1,-2) او(1,2-) په نقطو کې د C منحني د افقي مماسونو لرونکي ده .او د $\frac{dx}{dt} = 0$ په حالت کې د Cمنحني عمودي مماس لري .یعنې

$$\frac{dx}{dt} = 2t = 0 \Rightarrow t = 0$$

$$\frac{dy}{dt} = 3t^2 - 3\ |_{t=0} \neq 0$$

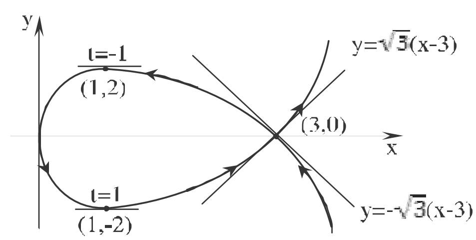
معلومیږي چې په t=0 کې $\frac{dy}{dt} \neq 0$ دی ، نو په عمودي مماس پورې اړوند نقطه (0,0) ده .

c) د منحني د مقعریت معلومولو له پاره دمنحني د دوهم مشتق ځخه کار اخلو :

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{d}{dt}(\frac{3}{2}(t-\frac{1}{t}))}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{3}{2}(1+\frac{1}{t^2})}{2t} = \frac{3(t^2+1)}{4t^3} .$$

د دوهم مشتق ځخه معلومیږي چې منحني د t>0 له پاره پورته خواته مقعره او د t<o له پاره ښکته خواته مقعره ده .

d) د (b) او (c) په نظر کې نیولو سره دC منحني ګراف په اساني سره رسمولی شو .(6)ش.



(6) ش

5. مثال

a) د $x=r(\theta - sin\theta), y = r(1 - cos\theta)$ په سیکلوئید باندې مماس په هغه نقطه کې پیدا کړی ،کوم چې هلته $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ وي.

b) په کومو نقطو کې منحني، د افقي او عمودي مماسونو لرونکي ده .

حل

a) د مماسي خط میل د

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{rsin\theta}{r(1-cos\theta)} = \frac{sin\theta}{1-cos\theta}$$

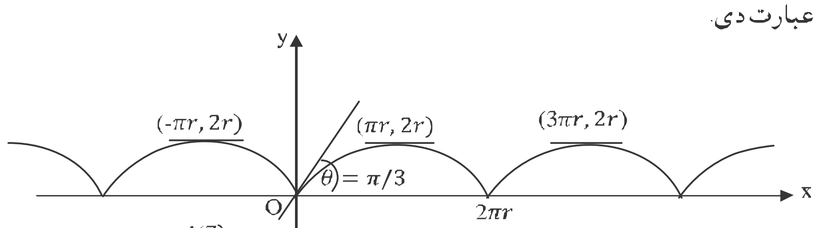
ځخه عبارت دی. که $\boldsymbol{\theta = \frac{\pi}{3}}$ وي، نو $x=r(\frac{\pi}{3} - sin\frac{\pi}{3}) = r(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3})$، $y=r(1-cos\frac{\pi}{3}) = \frac{r}{2}$ او

$$\frac{dy}{dx} = \frac{sin\frac{\pi}{3}}{1-cos\frac{\pi}{3}} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

کيږي. يعنې د مماس ميل$\sqrt{3}$ او معادله يې د $y - \frac{r}{2} = \sqrt{3}(x - \frac{r\pi}{3} + \frac{r\sqrt{3}}{2})$ يا د

$$\sqrt{3}x - y = r\left(\frac{\pi}{\sqrt{3}} - 2\right)$$

ياد څخه عبارت دی.



ش(7)

b) د افقي مماس له پاره لازمه ده چې $\frac{dy}{dx} = 0$ شي او دا حالت هغه وخت منځ ته راځي چې $\sin\theta = 0$ او $1\text{-}\cos\theta \neq 0$ شي. چې دا د$\theta = (2n-1)\pi; n \in \mathbb{Z}$ له پاره صدق کوي .نو په نتيجه کې په سيکلوييد باندې مطلوبه نقطه $((2n\text{-}1)\pi r, 2r)$ ده .که $\theta = 2n\pi$ شي، $\frac{dx}{d\theta}$او$\frac{dy}{d\theta}$دواړه صفر کيږي او بيا هم د ګراف څخه معلوميږي چې منحني د $\theta = 2n\pi$ په حالت کې عمودي مجانب لري او دا د لوپيتال قانون له مخې په اسانی سره ليدل کيږي . يعنې

$$\lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{dy}{dx} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \lim_{\theta \to 2n\pi^+} \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \infty \quad .$$

همدارنګه ښودلی شو چې$\lim_{x\to 2n\pi^-} \frac{dy}{dx} = -\infty$ کيږي .نو ښې له شک څخه وايو چې منحني په $\theta = 2n\pi$ کې عمودي مجانب لري .

6. مثال

$x = \theta - sin\theta$ ، $y = 1 - \cos\theta$ راکړل شوي دي. $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$پيدا کړی :

حل

$$x = \theta - sin\theta \Rightarrow \frac{dx}{d\theta} = 1 - cos\theta \;\; ; \;\; \theta = x + sin\theta \quad .$$

$$y = 1 - \cos\theta \Rightarrow \frac{dy}{d\theta} = sin\theta \;\; ; \; \frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{1}{1-cos\theta} \quad .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dx} = sin\theta \cdot \frac{1}{1-cos\theta} = \frac{sin\theta}{1-cos\theta} \quad .$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{sin\theta}{1-cos\theta}\right) \cdot \frac{d\theta}{dx} \quad .$$

$$= \frac{cos\theta(1-cos\theta) - sin^2\theta}{(1-cos\theta)^2} \cdot \frac{1}{1-cos\theta} = \frac{cos\theta - cos^2\theta - sin^2\theta}{(1-cos\theta)^2} \cdot \frac{1}{1-cos\theta} \quad .$$

$$= \frac{cos\theta - 1}{(1-cos\theta)^3} = \frac{-(1-cos\theta)}{(1-cos\theta)^3} = -\frac{1}{(1-cos\theta)^2} \quad .$$

7. مثال

$x = e^t \cdot cost$ ، $y = e^t \cdot sint$ راکړل شوي دي. $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{d^2y}{dx^2}$ پیدا کړی.

حل

$$\frac{dx}{dt} = e^t \cdot cost - e^t \cdot sint = e^t(cost - sint)\ .$$

$$\frac{dy}{dt} = e^t \cdot sint + e^t \cdot cost = e^t(sint + cost)\ .$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = e^t(sint + cost) \cdot \frac{1}{e^t(cost - sint)}\ .$$

$$= \frac{sint + cost}{cost - sint}\ .$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{sint + cost}{cost - sint}\right) \cdot \frac{dt}{dx}\ .$$

$$= \frac{(cost - sint)(cost - sint) + (sint + cost)(sint + cost)}{(cost - sint)^2} \cdot \frac{1}{e^t(cost - sint)}\ .$$

$$= \frac{2}{e^t(cost - sint)^3}\ .$$

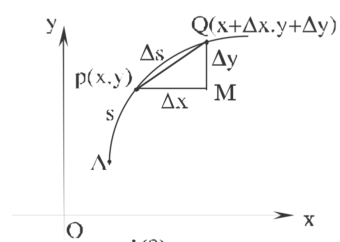
3. د قوس اوږدوالي تابع مشتق(Derivative of arc length)

د $y = f(x)$ تابع چې اول مشتق يې متمادي دی په نظر کې نيسو . فرضوو چې Λ د ګراف يوه مشخصه نقطه او $P(x,y)$ يې اختياري نقطه ده .نو که $Q(x+\Delta x, y + \Delta y)$ دP نقطې يوه بله مجاوره نقطه وي ، په دې صورت کې د A او P تر منځ د قوس اوږدوالی په s او د P او Q تر منځ د قوس اوږدوالی په Δs سره ښيو. نود s قوس تغير د x يا y د تغير په يو واحد کې په ترتيب سره په لاندې ډول دي.

$$\frac{dS}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta x} = \pm\sqrt{1 + (\frac{dy}{dx})^2} \quad ; \frac{dS}{dy} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta y} = \pm\sqrt{1 + (\frac{dx}{dy})^2}\ .$$

ثبوت

د (8) ش له مخې ليکوچې: $\overline{PM} = \Delta x;\ \overline{MQ} = \Delta y;\ \overline{PQ}^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ او $\frac{\Delta S}{\Delta x} = \frac{\Delta S}{PQ} \cdot \frac{PQ}{\Delta x}$ کيږي.



(8)ش

$$(\frac{\Delta S}{\Delta x})^2 = (\frac{\Delta S}{PQ})^2 \cdot (\frac{PQ}{\Delta x})^2 = (\frac{\Delta S}{PQ})^2 \cdot \frac{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}{(\Delta x)^2}\ .$$

$$=(\frac{\Delta s}{PQ})^2\left[1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2\right] \quad \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta x}=\frac{\Delta s}{PQ}\cdot\left[\sqrt{1+(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}\right].$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta x}=\sqrt{1+\lim_{\Delta x\to 0}(\frac{\Delta y}{\Delta x})^2}=\pm\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2} \quad .$$

$$(\frac{\Delta s}{PQ}=\frac{\text{د } PQ \text{ قوس}}{\text{د } PQ \text{ وتر}}\to 1\;;\Delta x\to 0;\Delta y\to 0)$$

$$\frac{dS}{dx}=\pm\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\,.$$

همدا شان ليکو چې:

$$(\frac{\Delta S}{\Delta y})^2=(\frac{\Delta S}{PQ})^2\cdot(\frac{PQ}{\Delta y})^2=(\frac{\Delta S}{PQ})^2\cdot\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{(\Delta y)^2}\quad=(\frac{\Delta S}{PQ})^2[1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2]\,.$$

$$=(\frac{\Delta S}{\Delta y})\quad=\frac{\Delta S}{PQ}\sqrt{1+\left(\frac{\Delta x}{\Delta y}\right)^2}\quad .$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{dy}=\lim_{\Delta y\to 0}\left[(\frac{\Delta s}{PQ})\quad\cdot\sqrt{1+(\frac{\Delta x}{\Delta y})^2}\ \right]\quad .$$

$$\frac{ds}{dy}=\pm\sqrt{1+(\frac{dx}{dy})^2}\quad .\blacksquare$$

پاتې د نه وي چې په $\frac{ds}{dy}$ پورې اړوند علامې د s په تزايد او تناقص پورې نظر د y متحول ته اړه لري. که s متزايد وي د $\frac{ds}{dy}$ له پاره "+" او که s متناقص وي د $\frac{ds}{dy}$ له پاره "-" علامه نيسو.

برسېره په پورتنيو معلوماتو که يوه منحني د $y=g(u)$ ، $x=f(u)$ پارامتريکو معادلو پواسطه راکړل شوي وي نو د s د تحول مقدار نظر u ته د لاندې فرمول په واسطه معلومېږي:

$$\frac{dS}{du}=\pm\sqrt{(\frac{dx}{du})^2+(\frac{dy}{du})^2}$$

چې دلته هم د $\frac{ds}{du}$ علامې د s په تزايد او تناقص نظر u پارامتر ته په نظر کې نيول کيږي او پورتنی فرمول په لاندې ډول په لاس راوړلی شو:

$$\frac{dS}{du}=\frac{ds}{dx}\cdot\frac{dx}{du}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}\cdot\frac{dx}{du}$$

$$=\sqrt{\left(1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)\cdot\left(\frac{dx}{du}\right)^2}$$

$$=\sqrt{(\frac{dx}{du})^2+(\frac{dy}{du})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dS}{du}=\sqrt{(\frac{dx}{du})^2+(\frac{dy}{du})^2}\quad [12].$$

.8 مثال

د $y=3x^2$ وله پاره د $P(x.y)$ په اختياري نقطه کې $\frac{dS}{dx}$ پيدا کړی.

حل

$$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+(\frac{dy}{dx})^2}=\sqrt{1+(6x)^2}=\sqrt{1+36x^2}\ \ ;\ \ (\frac{dy}{dx}=6x).$$

.9 مثال

$x^2+4y^2=8$ د ايليپس معادله ده، $\frac{dS}{dx}$ او $\frac{dS}{dy}$ پيدا کړی:

حل

$$x^2+4y^2=8 \Rightarrow 2x+8y\cdot\frac{dy}{dx}=0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y} \Rightarrow \frac{dx}{dy}=-\frac{4y}{x}.$$

$$\frac{dS}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{x^2}{16y^2}}=\sqrt{1+\frac{x^2}{4(8-x^2)}} \Rightarrow \frac{ds}{dx}=\sqrt{\frac{32-3x^2}{32-4x^2}}$$

$$(4y^2=8-x^2 \Rightarrow y^2=\frac{8-x^2}{4})$$

د بلې خوا پوهيږو چې: $\frac{2+3y^2}{2-y^2}=\frac{x^2+16y^2}{x^2}=1+\frac{16y^2}{x^2}=\left(\frac{dx}{dy}\right)^2+1$ دی، نو $\frac{dS}{dy}=\sqrt{\frac{2+3y^2}{2-y^2}}$ کيږي.

.10 مثال

د $\frac{dS}{d\theta}$ د $P(\theta)$ په نقطه کې، د $x=\sec\theta$ او $y=\tan\theta$ په منحني باندې پيدا کړی.

حل

$$\frac{dS}{d\theta}=\sqrt{(\frac{dx}{d\theta})^2+(\frac{dy}{d\theta})^2}\quad .$$

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{1\cdot(-sin\theta)}{cos^2\theta}=tan\theta\cdot sec\theta \Rightarrow (\frac{dx}{d\theta})^2=tan^2\theta\cdot sec^2\theta\ .$$

$$\frac{dy}{d\theta}=\frac{d}{d\theta}\left(\frac{sin\theta}{cos\theta}\right)=sec^2\theta\ .$$

$$\Rightarrow \frac{ds}{d\theta}=\sqrt{tan^4\theta\cdot sec^4\theta+sec^4\theta}\quad .$$

نوټ

په دې ځای کې ځنې خاص مفهومونه چې په انجینري کې ډېر زیات ورسره مخامخ کیږو ،لکه دمنحني کوږوالی(curvature) ،دمنحني د کوږوالي مرکز، دکوږوالي دایره او نورو څخه عبارت دي، چې هر یو یې د معادلو سره یو ځای په لاندې ډول معرفي کوو.

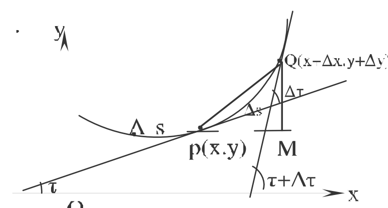
د منحني کوږوالی

د y=f(x) منحني کوږوالی **(Curvature)** (κ) د منحني په یوه اختیاري نقطه (P)کې ، د منحني د جهت د تغیر څخه په همغه نقطه (یعنې د P په نقطه کې د مماسي خط د میلان زاوئې (τ))د تغیر څخه ،د s قوس د اوږدوالي په یوه واحد کې عبارت دی. چې په ریاضیکي ډول داسې مفهوم لري :

$$\kappa = \frac{d\tau}{dS} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta S} = \frac{d^2y/dx^2}{[1+(dy/dx)^2]^{\frac{3}{2}}} \ .$$

یا

$$\kappa = \frac{-d^2x/dy^2}{[1+(dx/dy)^2]^{\frac{3}{2}}} \ .$$



ش(9)

په دې فرمولونو کې د κ قیمت مثبت دی په هغه صورت کې چې منحني د P په نقطه کې پورته خوا ته مقعره وي او منفي دی که منحني د P په نقطه کې ښکته خوا ته مقعره وي.د پورته او ښکته خواو مقعریت خصوصیات د دوهم مشتق د علامو څخه په څرګنده توګه لیدل کیږي . دلته د κ قیمت چې پورته لیکل شوی دی په لاندې توګه په لاس راوړو :

پوهیږو چې

$$\frac{dy}{dx} = tan\tau \Rightarrow \tau = \text{arc tg}\left(\frac{dy}{dx}\right) \ ; \ \ \kappa = \frac{d\tau}{dS} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{dx}{dS}.$$

$$\Rightarrow \kappa = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{1}{\frac{dS}{dx}} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}}$$

$$\left(\tau = arc\ tan\left(\frac{dy}{dx}\right) = arc\ tan(y')\right) \ .$$

$$\frac{d\tau}{dx} = \frac{1}{1+(y')^2} \cdot \frac{d}{dx}(y') = \frac{1}{1+(y')^2} \cdot y'' \ .$$

$$\kappa = \frac{d\tau}{dS} = \frac{d\tau}{dx} \cdot \frac{dx}{dS.} = \frac{y''}{1+(y')^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \ .$$

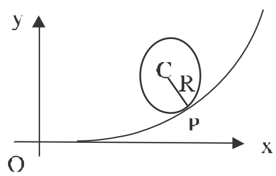
$$\kappa = \frac{y''}{1+(y')^2} \cdot \frac{1}{(1+(y')^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} \ .$$

د کوږوالی شعاع

د منحني دP په یوه نقطه کې د کوږوالی شعاع(**The radius of curvature**) (R) ،په همغه نقطه کې د $R=\frac{1}{|K|}$ سره مساوي دی په هغه صورت کې چې **0** ≠R وي.

د کوږوالی دایره

د منحني د P په یوه اختیاري نقطه کې د کوږوالی دایره(**The circle of curvature**) ، د هغې دایرې څخه عبارت دی چې د منحني په مقعرخوا کې په منحني باندې دP په نقطه کې مماس او د R شعاع ولري. (10) ش



(10)ش

دا دایره په دې ډول رسمیږي چې د منحني د P په نقطه کې یو نورمال په نظر کې نیسواو بیا د PC=R په شعاع یوه دایره رسم کوو ، مطلوبه دایره په لاس راځي.

د کوږوالی مرکز

د منحني د اختیاري نقطې (P) له پاره د کوږوالی مرکز(**The centre of curvature**) ، په همغه نقطه کې د کوږوالی دایرې مرکز (C) دی او د هغې مختصات $(\propto,\beta)$ د

$$\propto = x-\frac{\frac{dy}{dx}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]}{\frac{d^2y}{dx^2}} \;\; ; \;\; \beta = y+\frac{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\frac{d^2y}{dx^2}} \;\; .$$

یا

$$\beta = y-\frac{\frac{dx}{dy}\left[1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right]}{\frac{d^2x}{dy^2}} \;\; ; \;\; \propto = x-\frac{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}{\frac{d^2x}{dy^2}} \;\; .$$

څخه عبارت دي چې په لاندې ډول پیدا کیږي

پوهیږو چې د کوږوالی دایرې مرکز یوې خوا دP په نقطه پورې اړوند نورمال باندې پروت دی او له بلې خواد Pڅخه د R په اندازه فاصله لري چې د منحني د مقعریت په لور په پورته خوا کې اندازه کیږي.او ددې څخه لرو چې:

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\propto - x) \qquad (3)$$

$$(\propto - x)^2+(\beta - y)^2 = R^2 = \frac{\left|1+(y')^2\right|^3}{(y'')^2} \qquad (4)$$

کیږي او $R=\frac{1}{\kappa}$ دی.

$$\beta - y = -\frac{1}{y'}(\propto - x) \Rightarrow (\propto - x) := -y'(\beta - y).$$

د $(\propto - x) := -y'(\beta - y)$ قیمت په(4) رابطه کې وضع کوو مومو چې:

$$(\beta - y)^2 \cdot (y')^2 + (\beta - y)^2 = \frac{\left[1+(y')^2\right]^3}{(y'')^2}.$$

$$\Rightarrow (\beta - y)^2[1 + (y')^2] = \frac{\left[1+(y')^2\right]^3}{(y'')^2}.$$

$$\Rightarrow \beta - y = \pm\frac{1+(y')^2}{y''}.$$

دلته که منحني پورته خواته مقعره وي په دې صورت کې $y''>0$ او د دایرې مرکز(C) هم د P پورته خواته پروت دی. ځکه چې $\beta - y > 0$ کیږي. همدارنګه که $y''<0$ وي $\beta - y < 0$ کیږي چې په دې صورت کې هم مثبته علامه حاصلیږي. په نتیجه کې

$$\propto = x - \frac{\frac{dy}{dx}\left|1+(\frac{dy}{dx})^2\right|}{\frac{d^2y}{dx^2}} \ ; \ \beta = y + \frac{1+(\frac{dy}{dx})^2}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

یادونه د دا ډول مفهومونو په اړه د دې کتاب د وکتورونو په فصل کې په ډېر ښکاره ډول تشریح او وضاحت شوی دی.

11. مثال

د یوه متحرک جسم د P(x,y) نقطې مختصات په لاندې ډول دي:

x=cost-1 ; y=2sint+1 .

د P نقطې سرعت په منحني باندې پیدا کړئ. (t په ثانیه او د (x,y) مختصات په متر راکړل شوي دي)

a) په هغه صورت کې چې $t=\frac{5\pi}{6}$ وي

b)په هغه صورت کې چې $t=\frac{5\pi}{3}$ وي

c)په هغه صورت کې چې P ډېر ګړندی او یا ډېر ورو حرکت ولري.

حل

پوهیږو چې

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{(\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2} = \sqrt{\sin^2 t + 4\cos^2 t} = \sqrt{1+3\cos^2 t}.$$

(a) که $t=\frac{5\pi}{6}$ وي:

$$\frac{dS}{dt} = \sqrt{(\sin\frac{5\pi}{6})^2 + 4(\cos\frac{5\pi}{6})^2} = \sqrt{(\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{\sqrt{3}}{2})^2}$$

$$=\sqrt{\frac{1}{4}+3}=\frac{\sqrt{13}}{2}\,\mathrm{m/sec}\quad .$$

b) که $t=\frac{5\pi}{3}$ وي:

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+3\cos^2 t}$$

$$\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+3\cdot\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{7}}{2}\,\mathrm{m/sec}\quad .$$

c) دلته $\frac{d^2s}{dt^2}=0$ حل کوو. له دې څخه په $t=0;\frac{\pi}{2};\pi;\frac{3\pi}{2}$ کې بحراني قېمتونه په لاس راځي ، چې د $t=\pi; t=0$ په حالت کې $\frac{dS}{dt}=2m/sec$ د بر ګرېندی سرعت او په ; $t=\frac{\pi}{2}$ او $t=\frac{3\pi}{2}$ کې د P نقطې سرعت ډېر ورو دی .[10]

12. مثال

د $y^2=12x$ پارابول راکړل شوی ده، د هغې کوږوالی په لاندېنیو نقطو کې پیدا کړی .

$(a)\quad(0,0)\quad;\quad(b)\quad(\frac{3}{4},-3)\quad;\quad(c)\quad(3,6)$

حل

پوهېږو چې:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{y}\Rightarrow 1+(\frac{dy}{dx})^2=1+\frac{36}{y^2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{6}{y^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{36}{y^3}$$

(a) $\frac{dy}{dx}$ په (0,0) کې د تعریف وړ نه دی او د $\frac{dx}{dy}$ له پاره لیکو چې

$$\frac{dx}{dy}=\frac{y}{6}=0\Rightarrow 1+(\frac{dx}{dy})^2=1$$

$$\frac{d^2x}{dy^2}=\frac{1}{6}$$

$$k=\frac{-\frac{d^2x}{dy^2}}{[1+(\frac{dx}{dy})^2]^{\frac{3}{2}}}=\frac{\frac{-1}{6}}{[1+0]^{\frac{3}{2}}}\Rightarrow k=\frac{-1}{6}$$

(b) د $(\frac{3}{4},-3)$ په نقطه کې:

$$1+(\frac{dy}{dx})^2=5\Rightarrow\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{4}{3}\Rightarrow k=\frac{\frac{4}{3}}{5^{\frac{3}{2}}}=-\frac{4\sqrt{5}}{75}$$

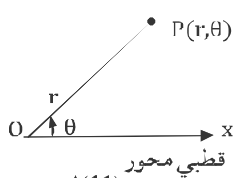
(c) د (3,6) په نقطه کې: $1+(\frac{dy}{dx})^2 = 2 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{-1}{6} \Rightarrow k = \frac{\frac{-1}{6}}{2^{\frac{3}{2}}} = -\frac{\sqrt{2}}{24}$

4. قطبي مختصات (polar Coordinates)

دقائمو مختصاتوپه سیستم کې د مستوي هره نقطه د یوې مرتبې جوړې عددونو په واسطه ښودل کیږي، په هغه صورت کې چې د نقطې عمودي او افقي فاصلې د دوو عمودي محورونو څخه راکړل شوي وي . یعنې د قائمو مختصاتو په سیستم کې د (x,y) نقطه د مبدا څخه په ترتیب سره د xاو y، افقي او عمودي فاصلې راښئي، چې اولې مختصې ته د نقطې فاصله او دوهمې ته یې د نقطې ترتیب ویل کیږي . په دې ځای کې مونږ د قطبي مختصاتو سیستم چې د نیوټن په واسطه معرفي شوی او ډېر د استعمال ځایونه لري درپېژنو .

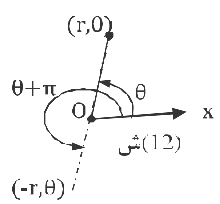
د قطبي مختصاتو سیستم

په دې سیستم کې د مستوي یوه نقطه (O)چې د مبدا(**Pole**) په نوم یادیږي انتخاب اود هغې څخه یوه شعاع (نیم خط) چې قطبي محور (**Polar axis**) ورته ویل کیږي، د x محور په مثبت لوري رسموو.که د مستوي یوه بله نقطه(P)چې د O څخه دr فاصله لري په نظر کې و نیسواو هغه زاویه چې دOP=r خط ئې د x محور د مثبت لوري سره جوړوي په θ سره ښیو. په دې حالت کې r او θ ته د Pنقطې قطبي مختصات ویل کیږي او د مرتبې جوړې (r,θ) په واسطه سره یې ښیو .دلته د θ زاویه ساعت د ستنې ددوران په خلاف لوري مثبت او د ساعت ستنې په همجهت منفي قبول شوې ده .(11) ش



(11)ش

که P=0 وي، نو r=0 او د قطب(Pole) مختصه $(0,\theta)$کیږي. د (r,θ) په قطبي مختصه کې که r منفي وي،نو په دې حالت کې قبلوو چې د $(-r,\theta)$ او (r,θ) نقطې په یوه خط باندې په متناظر ډول د مبدا څخه د r په فاصله پرتې دي .دا هم زیاتوو چې د $(-r,\theta)$ او $(r,\theta+\pi)$ مختصې یوازې په یوه نقطه پورې اړه لري .(12)ش.



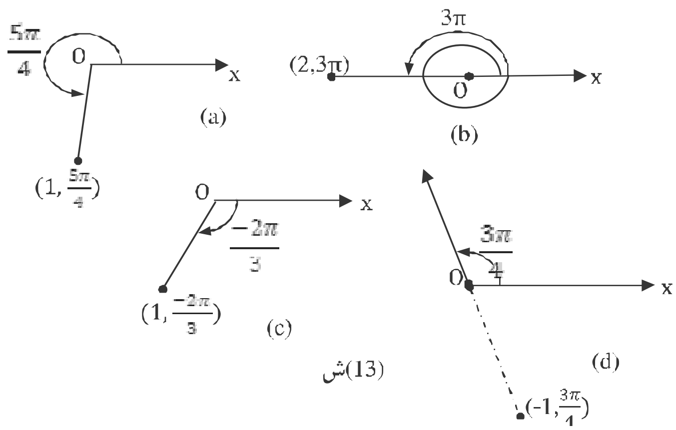
13 مثال

د قطبي مختصاتو په نظر کې نیولو سره د لاندې نقطو موقعیت پیدا کړی .

$(-1,\frac{3\pi}{4})$ (d

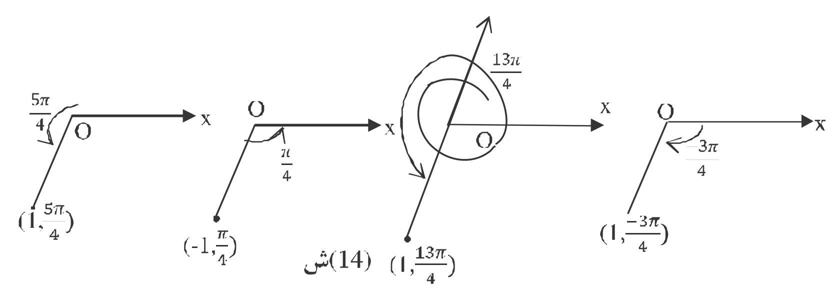
حل

نقطې په(13) ش کې رسم شوي دي .په (d) کې نقطه د قطب څخه د 1 واحدو په فاصله د په څلورمه ربع کې پرته ده .



(13)ش

د قائیمو مختصاتو په سیستم کې هره نقطه یوازې د یو جفت مرتبې جوړې په واسطه ښودل کیږي او د قطبي مختصاتو په سیستم کې هره نقطه د زیاتو قطبي مختصاتو په شکل سره معرفي کولی شو .د مثال په توګه د $(1,\frac{5\pi}{4})$ او $(-1,\frac{\pi}{4})$ قطبي مختصات دواړه په یوه نقطه پورې اړه لري .(14)ش



(14)ش

په حقیقت کې د θ زاوئې له پاره د ساعت د ستنې په خلاف جهت مکمل دوران 2π دی او د (r,θ) نقطه په عمومي ډول سره د $(r,\theta+2n\pi)$ او $(-r,\theta+(2n+1)\pi)$ په واسطه سره ښودلی شو .

دقائیمو او قطبي مختصاتو تر منځ اړیکې

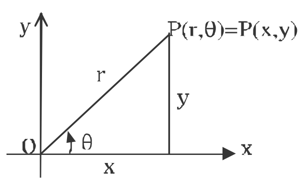
د (15)ش له مخې په ښکاره معلومیږي چې قطب(مبدا) د قایمو مختصاتو په مبدا او قطبي محور د x محورد مثبت لوري سره مطابقت کوي. نو که د P نقطې قائیم مختصات (x,y) اوقطبي مختصات (r,θ)وي، لیکو چې :

$$\cos\theta=\frac{x}{r}\ \Rightarrow x=r\cdot\cos\theta$$

$$\sin\theta=\frac{y}{r}\ \Rightarrow y=r\cdot\sin\theta$$

$$\Rightarrow\ x=r\cdot\cos\theta\ ;\ y=r\cdot\sin\theta\quad\ldots\qquad(5)$$

پورتنی معادلې د r>o او $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ له پاره د r او θ په ټولو قیمتونو کې صدق کوي .



ش(15)

په (5) رابطه کې قطبي مختصات راکړل شوي دي ، قایم مختصات ئې پیدا کولی شو ، که قایم مختصات راکړل شوي وي د قطبي مختصاتو د پیدا کولو له پاره لازمه ده چې r او θ پیدا شي .

او د هغې له پاره لیکو چې :

$$r^2=x^2+y^2\ ;\ tan\theta=\frac{y}{x}\quad\ldots\qquad(6)$$

14. مثال

د نقطې قطبي مختصات $(2,\frac{\pi}{3})$ راکړل شوي دي ، په قائیم مختصاتو باندې یې واړوی.

حل

څرنګه چې r=2 او $\theta=\frac{\pi}{3}$ دی . لیکو چې:

$$x=r\cos\theta=2\cos\frac{\pi}{3}=2\cdot\frac{1}{2}=1$$

$$y = r\ \sin\theta = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}\ \ .$$

یعنې داړوند نقطې قایم مختصات د $(1,\sqrt{3})$ څخه عبارت دي .

15. مثال

د نقطې قائیم مختصات (1,-1) ، په قطبي مختصاتو باندې تبدیل کړئ .

حل

$$r^2 \quad = x^2 + y^2 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}\ .$$

$$\tan\theta = \frac{y}{x} = \frac{-1}{1} = -1\ \ .$$

دا چې د (1,-1) نقطه په څلورمه ربع کې پرته ده، نو$\theta = -\frac{\pi}{4}$ یا $\theta = \frac{7\pi}{4}$ دی .دلته یو ممکنه ځواب$(\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4})$او بل ځواب $(\sqrt{2}, \frac{7\pi}{4})$ دی .

نوټ

دا چې قطبي مختصات ډېر زیات د استعمال ځایونه لري او په ریا ضي یا محاسبهٔ کې ډېر زیات ورسره مخامخ کیږو . نو له دې وجې څخه د قطبي مختصاتو اړوند مفهومونو ته نور هم خپل نظر را اړوو .

قطبي منحني

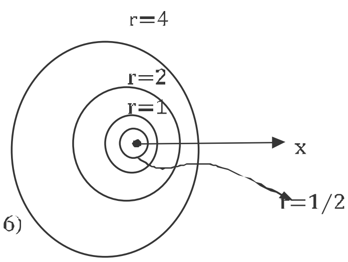
د$r = f(\theta)$ یا په عمومي ډول سره د $F(r,\theta) = 0$ په معادله پورې اړوند ګراف د هغونقطو(P) ستې څخه عبارت دی چې لږ تر لږه د (r,θ) یوې قطبي مختصې په واسطه سره وښودل شي او قطبي مختصه .په اړوند معادله کې صدق وکړي

16. مثال

په$r = 2$ قطبي معادله پورې اړوند منحني رسم کړئ .

حل

د r=2 معادلې منحني د هغو نقطو(r,θ) ستې دی چې په هغه کې r=2 صدق وکړي. دا چې د r=2 په معادله کې د نقطې فاصله د قطب څخه 2 واحده ده ، نو د r=2 معادله هغه دایره ده چې مرکز یې په قطب او شعاع یې r=2 وي . په عمومي توګه سره د $r = a$ معادله، هغه دایره راښیي چې مرکز یې په قطب او شعاع یې $|a|$ واحده وي .(16) ش



(16)ش

17. مثال

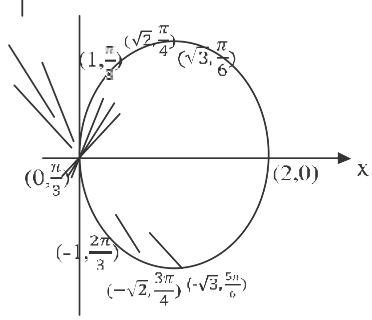
i) د $r=2\cos\theta$ منحني رسم کړی .

ii) دمنحني معادله د قایمو مختصاتو له جنسه پیدا کړی .

حل

i) د r د قیمت پیدا کولو له پاره د θ په مناسبو قیمتو کې یو جدول ترتیب کوو او د (r,θ) نقطې. د اړوند قیمتونو په درلودلو سره رسموو. وروسته له هغې نقطې سره وصلوو په نتیجه کې د منحني اړوند ګراف په لاس راځي .(17)ش.

θ	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$r=2\cos\theta$	2	$\sqrt{3}$	$\sqrt{2}$	1	0	-1	$-\sqrt{2}$	$-\sqrt{3}$	-2



(17)ش

ii) د قایمو مختصاتو په سیستم باندې د پورتنی معادلې د اړولو په خاطر موږ د $x=r\cos\theta$ او $y=r\sin\theta$ څخه کار اخلو :

څرنګه چې:

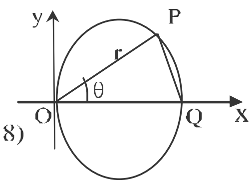
$$x=r\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{x}{r}.$$

$$\Rightarrow r=2\cos\theta=\frac{2x}{r}\Rightarrow 2x=r^2 .$$

$$\Rightarrow 2x=r^2=x^2+y^2 \text{ یا } x^2+y^2-2x=0$$

$\Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1.$

دا د هغې دايرې معادله ده چې مرکز ئې(1,0) اوشعاع ئې يو واحد ده .(18)ش



(18)ش

په قطبي منحني کې مماس

په $r=f(\theta)$ پورې اړوند د مماسي خط ميل موندلو له پاره θ د پارامتر په څېر قبلوو اودراکړل شوي معادلې د پارامتريکو معادلو پيدا کولو له پاره ليکو چې :

$x=r\cdot \cos\theta = f(\theta)\cdot cos\theta$

$y=r\cdot\sin\theta = f(\theta)\cdot sin\theta$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\frac{dr}{d\theta}\cdot sin\theta + r\cdot cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cdot cos\theta - r sin\theta} \quad \dots \qquad (7)$$

د افقي مماس د موندلو له پاره هغه نقطې پيدا کوو، چې په هغه کې $\frac{dy}{d\theta} = 0$ او $\frac{dx}{d\theta} \neq 0$ وي . په همدې ترتيب د عمودي مماس د موندلو له پاره $\frac{dx}{d\theta} = 0$ او $\frac{dy}{d\theta} \neq 0$ نيسو.

دا هم زياتوو چې که زموږ مطلب د مماسي خط موندل په قطب کې وي، نو r=0 او $\frac{dr}{d\theta} \neq 0$ نيسو .په دې حالت کې (7) معادله په لاندې توګه ليکلی شو :

$\frac{dy}{dx} = tan\theta$.

د مثال په توګه د $\theta = \frac{\pi}{4}$ يا $\theta = \frac{3\pi}{4}$ په صورت کې $r = \cos2\theta = 0$ او $-2\sin 2\theta \neq 0$ = $\frac{dr}{d\theta}$ کېږي . دا ددې مفهوم لري چې د $\theta = \frac{\pi}{4}$ او $\theta = \frac{3\pi}{4}$ خطونه($y= -x \wedge y = x$)د $r=\cos2\theta$ په منحني باندې مماسي خطونه دي چې د مبدا(قطب) څخه تېرېږي .

18 مثال

i) د $r=1+\sin\theta$ کاردوئيد(cardoid) له پاره د مماسي خط معادله او د مماس ميل په $\theta = \frac{\pi}{3}$ کې پيدا کړی

ii) په کاردوئيد باندې هغه نقطې پيدا کړی چې په هغه کې مماس د افقي يا عمودي شکل لرونکي وي

حل.

(i (7) معادله په $r = 1+\sin\theta$ باندې تطبیق کوو :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{\frac{dr}{d\theta}\cdot\sin\theta+r\cdot\cos\theta}{\frac{dr}{d\theta}\cdot\cos\theta-r\sin\theta}=\frac{\cos\theta\cdot\sin\theta+(1+\sin\theta)\cos\theta}{\cos\theta\cdot\cos\theta-(1+\sin\theta)\sin\theta}$$

$$=\frac{\cos\theta\cdot(1+2\sin\theta)}{1-2\sin^2\theta-\sin\theta}=\frac{\cos\theta\cdot(1+2\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)}\ .$$

$$\frac{dy}{dx}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{3}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(1+2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}{\left(1+\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\left(1-2\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)}=\frac{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})}{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-\sqrt{3})}$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{(2+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{1+\sqrt{3}}{-1-\sqrt{3}}=-1\ .$$

(ii که $\frac{dy}{d\theta}=\cos\theta(1+2\sin\theta)=0$ وي $\theta=\frac{\pi}{2};\ \frac{3\pi}{2};\frac{7\pi}{6};\frac{11\pi}{6}$ کیږي . په همدې ترتیب سره که $\frac{dx}{d\theta}=(1+\sin\theta)(1-2\sin\theta)=0$ وي نو $\theta=\frac{3\pi}{2};\frac{\pi}{6};\frac{5\pi}{6}$ کیږي.

په نتیجه کې افقي مماسونه د $\left(2,\frac{\pi}{2}\right)$; $\left(\frac{1}{2},\frac{7\pi}{6}\right)$ او $\left(\frac{1}{2},\frac{11\pi}{6}\right)$ نقطو کې او عمودي مماسونه د $\left(\frac{3}{2},\frac{\pi}{6}\right)$ او $\left(\frac{3}{2},\frac{5\pi}{6}\right)$ نقطو کې په لاس راځي او د $\theta=\frac{3\pi}{2}$ له پاره $\frac{dy}{d\theta}$ او $\frac{dx}{d\theta}$ دواړه صفر کیږي. په دې حالت کې باید د احتیاط څخه کار واخیستل شي ، یعنې د لوپیتال قانون په استفادې سره لیکو چې :

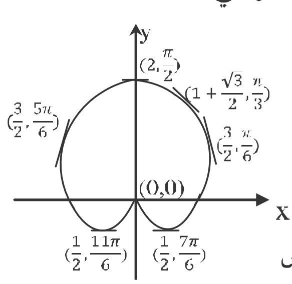
$$\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\frac{dy}{dx}=\left(\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{1+2\sin\theta}{1-2\sin\theta}\right)\right)\left(\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)\right)$$

$$=-\frac{1}{3}\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{\cos\theta}{1+\sin\theta}\right)=-\frac{1}{3}\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^-}\left(\frac{-\sin\theta}{\cos\theta}\right)=\infty$$

همدارنګه په لاس راځي چې

$$\lim_{\theta\to\left(\frac{3\pi}{2}\right)^+}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

بنا پردې په منحني باندې عمودي مماس په قطب کې منځ ته راځي.



ش(19)

نوټ

په 18. مثال کې د کار د اسانۍ له پاره د(7) معادلې په عوض د لاندینی طریقې څخه کار اخلو:

$$x=r\cos\theta = (1+\sin\theta)\cos\theta = \cos\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta$$

$$y=r\sin\theta = (1+\sin\theta)\sin\theta = \sin\theta + \sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{\cos\theta + 2\sin\theta\cdot\cos\theta}{-\sin\theta+\cos 2\theta} \quad .$$

چې دا د18-ام مثال د $\frac{dy}{dx}$ د قیمت سره معادل قیمت دی.

5. په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطعو معادلې

په 3.2 کې مو د پارابول مفهوم د یو محراق او یو هادي، دایلپس او هایپربول مفهومونه مو د دوو محراقونو او دوو هادي له مخې روښانه کړل او د هر یو په اړوند مو د هغوی له پاره ځانګړې معادلې تر لاسه کړلې .دلته موږ د درو واړو مفهوم د یو محراق او یو هادي په واسطه بیانوو . برسېره پردې که موږ د مخروطي مقاطعو محراق په مبدا کې انتخاب کړو دمخروطي مقاطعو یوه ساده معادله په لاس راځي چې په فضا کې د سماوي اجسامولکه د ستورو ، ستالایټ او لکۍ لرونکو ستورو د حرکت د تشریح کولو له پاره ښه امکانا ت برابروي.

1.6 دعوی

که F یوه مستقره نقطه (محراق)او ℓ یومستقر خط(هادي) په یوه مستوي کې راکړل شوی وي، په دې صورت کې د مستوي د هغو نقطو(P) سټ چې د هغوی له پاره$e = \frac{|PF|}{|P\ell|}$ صدق وکړي ،د مخروطي مقطع څخه عبارت دی. یعني دهغو نقطوسټ دی چې د محرا ق او دهادي تر منځ د فاصلو تر منځ نسبت یې دe ثابت عدد سره مساوي دی . دلته e یو مثبت ثابت عدد دی چې د$\frac{c}{a}$ سره مساوي دی او دعن المرکزیت(accentricity) په نوم یادیږي . لیکو چې :

i) که e<1 وي . په دې صورت کې مخروطي مقطع ، الپس دی.

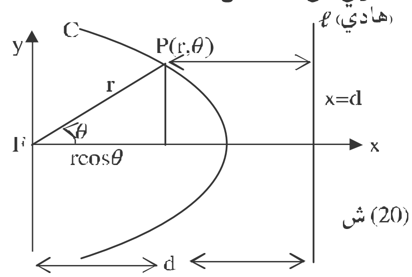
ii) کهe=1 وي . مخروطي مقطع پارابول دی .

iii) د e >1 په صورت کې مخروطي مقطع، هایپربول دی .

ثبوت

که e =1 وي نو$|P\ell| = |PF|$ کیږي او د پارابول د تعریف له مخې مخروطي مقطع پارابول دی

د پاتې دوو نورو حالتونو له پاره د کار د اسانی په خاطر ، فرضوو چې محراق(F)د وضعیه کمیتاتو په مبدا کې پروت دی او هادي ئې دyمحور سره موازی اود مبدا څخه د d په اندازه فاصله لري . یعنې هادي په قطبي محور عمود دی چې معادله ئې د x = d سره مساوي دی .(20) ش



(20) ش

که چیرې د P نقطې قطبي مختصات (r,θ) وي ،د (20) ش له مخې لیکو :

$$|PF| = r \;\; : |P\ell| = d - r\,cos\theta$$

$$\Rightarrow \frac{|PF|}{|P\ell|} = e \Rightarrow |PF| = e|P\ell|$$

$$\Rightarrow r = e\,(d - r\cos\theta) \quad \ldots \qquad (8)$$

که د (8) معادلې دواړه خواوې مربع کړو ، وروسته له هغې (8) امه قطبي معادله په اسانی سره په قائیمو مختصاتو باندې بدلیږي . یعنې:

$$r^2 = x^2 + y^2 = e^2(d - rcos\theta)^2$$

$$= e^2(d-x)^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = e^2(d^2 - 2dx + x^2)$$

یا

$$(1 - e^2)x^2 + 2de^2x + y^2 = e^2d^2$$

اخیرنی معادله د مربع د تکمیل څخه وروسته په لاندې شکل لیکو :

$$(x + \frac{e^2d}{1-e^2})^2 + \frac{y^2}{1-e^2} = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \quad \ldots \qquad (9)$$

په (9) معادله کې که e< 1 وي نو معادله په الیپس پورې اړه لري . یعنې (9) معادله د

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

شکل لري چې:

$$h = -\frac{e^2d}{1-e^2} \;\; ; \; a^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} \;\; ; \; b^2 = \frac{e^2d^2}{1-e^2} \quad \ldots \qquad (10)$$

کیږي . د الیپس د محراقي فاصلې له پاره لیکو چې :

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2} - \frac{e^2d^2}{1-e^2} = \frac{e^4d^2}{(1-e^2)^2} \Rightarrow c = \frac{e^2d}{1-e^2} = -h \quad ,$$

که (10) معادله د e له پاره د a او c له جنسه حل کړو ، $e = \frac{c}{a}$ په لاس راځي .

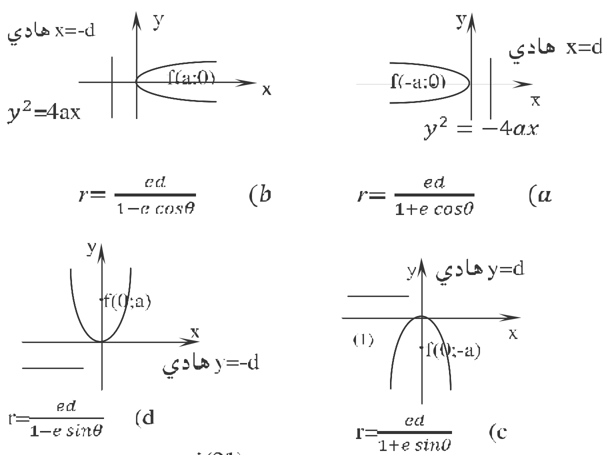
که $e > 1$ وي نو $1-e^2 < 0$ کیږي او (9) معادله یو هایپربول راکوي چې د پورته په شان د (9) معادلې څخه د

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

معادله حاصلیږي .دلته $c^2 = a^2 + b^2$ دي او بیا هم د پورته په شان $e = \frac{c}{a}$ صدق کوي . ■

که په(20) ش پورې اړوند (8) معادله د r له پاره حل کړو د $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ معادله په لاس راځي .

همدارنګه که هادي د محراق په کینه خوا کې انتخاب کړو د هادي معادله $x = -d$ او که هادي د قطبي محور سره موازي وي معادلې ئې $y = \pm d$ کیږي . د هادي په نظر کې نیولو سره په لاندې شکلونو کې دهرې مخروطي مقطع معادلې د خپل شکل په لاندې برخه کې لیکل شوي دي .



$r = \frac{ed}{1-e\cos\theta}$ (b $r = \frac{ed}{1+e\cos\theta}$ (a

$r = \frac{ed}{1-e\sin\theta}$ (d $r = \frac{ed}{1+e\sin\theta}$ (c

(21)ش

مناقشه

په قطبي مختصاتو کې د مخروطي مقاطعو معادلې، په قائیمو مختصاتو کې د مخروطي مقاطعو په مقایسه ډېرې ځانګړتیاوې لري . هغه دا چې یوازې د e او هادي معادلې په پېژندلو سره کولی شو چې د مخروطي مقطع ټول خصوصیات و پېژنو . دا ځانګړتیاوې په (10) رابطه کې په ښکاره لیدل کیږي .

2.6 دعوی

لاندې قطبي معادلې چې عن المرکزیت یې e دی ، راکړل شوي دي :

$$r = \frac{ed}{1+e\ \cos\theta} \text{ یا } r = \frac{ed}{1+e\ \sin\theta}$$

که $e < 1$ وي معادله په الپس ، که $e=1$ وي معاله په پارابول او که $e > 1$ وي معادله په هایپربول پورې اړه لري . او د هریوې لاسته راوړنه د (1.6 دعوې) له مخې په اسانی سره په لاس راځي.

19. مثال

د یو پارابول معادله چې محراق ئې په مبدا او هادي معادله ئې $y= -6$ ده پیدا کړی .

حل

د پارابول له پاره $e = 1$ او $-d = -6$ $y=$ را کړل شوي دي . نو د (21_d) شکل له مخې د پارابول قطبي معادله د لاندې شکل لرونکي ده :

$$r = \frac{ed}{1-e\ \sin\theta} = \frac{6}{1-\sin\theta}$$

20. مثال

یوه مخروطي مقطع د لاندې قطبي معادلې لرونکي ده

$$r = \frac{10}{3-2\cos\theta} \ .$$

منحنې ئې مشخصه کړی .

حل

د $r = \frac{10}{3-2\cos\theta}$ قطبي معادله د $r = \frac{ed}{1-e\ \cos\theta}$ سره مقایسه کوو ، لیکو چې:

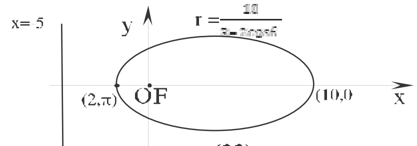
$$r = \frac{10}{3-2\cos 0} = \frac{\frac{10}{3}}{1-\frac{2}{3}\cos\theta}$$

$$\Rightarrow e = \frac{2}{3} \Rightarrow e \cdot d = \frac{10}{3}$$

$$d = \frac{\frac{10}{3}}{\frac{2}{3}} = 5 \Rightarrow x = -d$$

$$x = -5$$

په نتیجه کې منحني په الیپس پوري اړه لري .که $\theta = 0$ وي $r = 10$ کیږي او که $\theta = \pi$ وي $r=2$ کیږي . یعنې د الیپس د راسونو قطبي مختصات $(10,0)$ او $(2,\pi)$ کیږي، چې ګراف ئې په لاندې ډول دی.



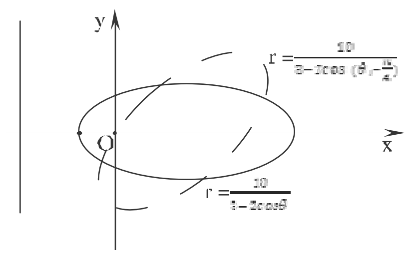
(22)ش

21. مثال

20. مثال په نظر کې نیسو، که الیپس د $\frac{\pi}{4}$ په اندازه په مبدا باندې دوران وکړي په دې صورت کې د الیپس قطبي معادله پیدا کړی .

حل

که د الیپس په معادله کې د θ په عوض $\theta - \frac{\pi}{4}$ وضع شي د دوراني الیپس معادله په لاس راځي . یعنې $r = \frac{10}{3-2\cos(\theta-\frac{\pi}{4})}$ حاصلیږي . چې ګراف ئې د (20) مثال د ګراف په مقایسه د $\frac{\pi}{4}$ په اندازه په مبدا باندې دوران خوړلی دی .



(23) ش

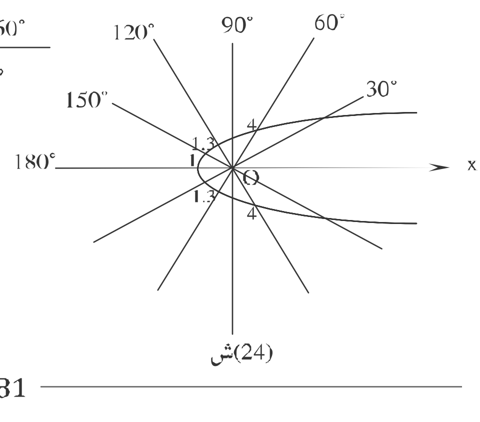
22. مثال

د $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ ګراف رسم کړی

حل

د $r = \frac{2}{1-\cos\theta}$ معادله د $r = \frac{ed}{1-e\cdot\cos\theta}$ سره مقایسه کوو .دلته معلومیږي چې $e = 1$ او د معادلې منحني په پارابول پوري اړه لري. همدارنګه پوهیږو چې $\cos(-\theta) = \cos\theta$ کیږي. نو پارابول نظر قطبي محور(x) ته متناظره ده. که $\theta = 0^o$ وي $r = \infty$ او که $\theta = 180^o$ وي $r=1$ کیږي. همدارنګه د منحني د رسمولو له پاره θ ته یو څو نور قیمتونه هم ورکوو.

θ	0°	60°	120°	180°	240°	300°	360°
r	∞	4	1.3	1	1.3	4	∞



(24)ش

6. تمرین

د لاندې مخروطي مقاطعو قطبي معادلې پیدا کړی په هغه صورت کې چې محراق ئې په مبدا کې پروت وي.

1. د هایپربول له پاره $e=\frac{7}{4}$ او د هادي معادله ئې $y=6$ ده
2. د پارابول د هادي معادله $x = 4$ ده.
3. د الپس له پاره $e = \frac{3}{4}$ او د هادي معادله ئې $x= - 5$ ده

دپارامتریکو معادلو په استعمال سره د منحني ګراف رسم کړی. همدارنګه د t په تزاید سره د منحني د مسیر جهت د تیر په واسطه نشاني کړی.

4. x =3t-5 ; y=2t+1
5. x=1+t ; y=5-2t
6. x=$t^2 - 2$; $y = 5 - 2t$, $-3 \leq t \leq 4$
7. x=sinθ ; $y = cos\theta$; $0 , \leq \theta \leq 4$
8. x=4cosθ ; $y = 5$
9. x=sint ; y=$sin^2 t$
10. x=2+cost ; y=3+sint

11. ثبوت کړی چې د $x=x_1 + (x_2 - x_1)t ; y = y_1 + (y_2 - y_1)t$ پارا متریک معادلې، په هغه قطعه خط پورې اړه لري چې د (2,7-) او(3,-1) دوې نقطې سره نښلوي او $0\leq t \leq 1$ دی.

12. د هغه قطعه خط پارامتریکې معادله ولیکی چې د (1,7-) او (3,-1) نقطې سره نښلوي.

13. د $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ الېپس له پاره پارامتریکې معادله ولیکی.
14. که $x=t-t^2 ; y = 2 - 5t$ وي، $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړی.
15. که $x =t\, e^t$; $y = t + e^t$ وي، $\frac{dy}{dx}$ پیدا کړی.

دا په راکړل شوي قېمت کې په منحني باندې د مماس معادله پیدا کړی .

.16 x=t^2+t ; $y=t^2-t$; $t=0$

.17 x= t - t^{-1} ; $y=1+t^2$; $t=1$

.18 x=t sint ; y = t cost ; t=π

په راکړل شوي نقطه کې په منحني باندې د مماس معادله پیدا کړی.

.19 x= cost+cos2t ; y = sint+sin2t ; (1,-1)

.20 x =6 sint ; y =t^2+t ; (0,0)

د لاندې منحنیو له پاره $\frac{dy}{dx}$ او $\frac{d^2y}{dx^2}$ دا په هغو قېمتو کې پیدا کړی ،کوم چې د هغې له پاره منحني پورته خواته مقعره وي

.21 x=4+t^2 ; $y=t^2+t^3$ x =t^3-12t ; $y=t^2-1$

.22 x= 2sint ; y= 3cost ; 0<t<2π

په منحني باندې د افقي یا عمودي مماس د تماس نقطې پیدا کړی .

.23 x=10-t^2 ; $y=t^3-12t$

.24 x=$2t^3-3t^2-12t$; $y=2t^3+3t^2+1$

25. ځواب : $x^2+y^2=25$; $\left(\frac{ds}{dx}=\frac{5}{\sqrt{25-x^2}}\ ;\ \frac{ds}{dy}=\frac{5}{\sqrt{25-y^2}}\right)$

26. ځواب : $y^2=x^3$; $\left(\frac{ds}{dx}=\frac{1}{2}\sqrt{4+9x}\ ;\ \frac{ds}{dy}=\frac{\sqrt{4+9y^2}}{3y^{\frac{1}{3}}}\right)$

27. ځواب: 6xy =x^4+3 ; $\left(\frac{ds}{dx}=\frac{x^4+1}{2x^2}\right)$

28. ځواب : x =t^2 , $y=t^3$; $\left(\frac{ds}{dt}=t\sqrt{4+9t^2}\right)$

29. ځواب : x= cos t , y = sin t ; $\left(\frac{ds}{dt}=1\right)$

30. ځواب : x=2 cos t , y = 3 sin t ; $\left(\frac{ds}{dt}=\sqrt{4+5cos^2t)}\right)$

.31 y=$\frac{x^3}{3}$; $k\ |_{x=0}=?$; $k\ |_{x=1}=?$; $k\ |_{x=-2}=?$

32. د $r=\frac{1}{1+sin\theta}$ معادله پورې اړوند منحني مشخصه او د هادي معادله ئې پیدا کړی .

33. د $r=\frac{9}{6+2\ cos\theta}$ اړوند منحني مشخصه او د هغې له پاره د هادي معا دله او د c قېمت پیداکړی .

34. د $r=\frac{1}{(1-2\ sin\theta)}$ په معادله پورې اړوند منحني مشخصه او د هغې د هادي معادله پیدا کړی .

35. په پورتنی معادله پورې د اړوند منحني معادله د $\frac{3\pi}{4}$ دوران څخه وروسته ولیکی .

36. که د یوې مخروطي مقطع محراق په مبدا ، عن المرکزیت ئې e او د هادي معادله یې y=d وده. ایا د $r = \frac{ed}{1-ecos\theta}$ پارامتریک معادله لري ؟

37. وښئی چې ،که د یوې مخروطي مقطع محراق په مبدا ،عن المرکزیت e او هادي y = -d وي معادله ئې $r=\frac{ed}{1-ecos\theta}$ ده .

38. وښئی چې د $r=\frac{c}{1+cos\theta}$ او $r=\frac{d}{1-cos\theta}$ دوې مخروطي مقاطع یو تربله عمودا متقاطع دي [12].

اووم فصل

انتیګرال

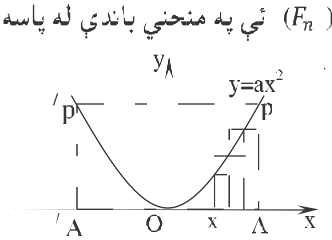
1 دانتیګرال مفهوم

لکه څنګه چې د مشتق مفهوم ،د مماس د موندلو د مسئلې څخه انکشاف پیدا کړی دی په همدې ډول د انتیګرال حساب هم د یوې سطحې د مساحت موندلو مسئلې څخه کوم چې د یوې منحني د ګراف پواسطه احاطه شوی وي ،سرچېنه اخلي.

پخوانیو یونانیانویه فکر کاوه ، چې یوازې د هغو سطحو مساحت د اندازې وړ دی چې په یوه مربع یا مستطیل باندې بدل کیدلی شي.ولې یوناني ریاضیدان ارشمیدس[10] وکولی شول چې د یوې سطحې مساحت کوم چې د پارابول د ګراف د یوې برخې او د x محور تر منځ محدود شوی وي په لاس راوړي.د نوموړي طریقه په دې ډول وه چې مطلوبه سطح به یې د یو شمېر معلوموسطحو د یو ترادف په واسطه چې معلوم مساحتونه به ئې درلودل پوښ کوله او مطلوب مساحت به یې په لاس راوست او له دې ځای څخه د انتیګرال نوم (د Integer " د لاتیني کلمې څخه منځ ته راغی. چې په نتیجه کې د W.Leibniz جرمني ریاضیدان (1716-1727) او Isacc Newton انګلیسي ریاضیدان ،(1642-1727)د هلو ځلو په جریان کې د مشتق او انتیګرال حساب تر منځ اړیکې منځ ته راغلې او په دې وروستیو کې دې مفهوم ډېر اساسي او مهم رول پیدا کړ، چې نن ورځ په ریاضیاتو او په تېره بیا د انجینري په برخه کې ډېر مهم رول لري.د موضوع د روښانولو په خاطر د لاندینیو څو مثالونو څخه یاداوري کوو .

1. مثال " ارشمیدس"

د F سطحې مساحت پیدا کوو کوم چې د $y=ax^2$ پارابول(a>0) د OP برخې لاندې، د x محور د OA قطعه خط او د PA عمود پواسطه احاطه شوی وي. ددې مقصد له پاره د OA اوږدوالی په n مساوي برخو ویشو او د شکل مطابق داسې مستطیلونه ،چې یو شمېر(F_n) ئې په منحني باندې له پاسه او یو شمېر(F_n') چې د منحني په د ننه کې پراته وي رسموو (1) ش .



(1)ش

---

[10] Archimedes (212-287 ق-م) یوناني ریاضي دان.

دلته د F_n او F'_n مساحتونه د زینې په شان شکلونه جوړوي، کوم چې یو له بل څخه د $\frac{x\cdot y}{n}$ په اندازه فرق لري.یعنې $F_n - F'_n = \frac{x\cdot y}{n}$ کیږي او له دې څخه $\lim_{n\to\infty}(F_n - F'_n) = 0$ په لاس راځي.
څرنګه چې $F'_n < F < F_n$ دی ، نو لیکو چې:

$$\lim_{n\to\infty} F'_n = \lim_{n\to\infty} F_n = F \ .$$

همدارنګه د هر یو مستطیل ارتفاع د پارابول یعنې د y د هغو قیمتونو څخه عبارت دی چې د هغوی د x مختصې د $x = \frac{1}{n}x\ ,\frac{2}{n}x\ ,\frac{3}{n}x, \ldots ,\frac{(n-1)}{n}x\ ,\frac{n}{n}x$ سره مساوي دي او د y قیمتونه ئې په ترتیب سره $a\cdot\frac{1}{n^2}x^2, a\cdot\frac{2^2}{n^2}x^2, \ldots , a\cdot\frac{(n-1)^2}{n^2}x^2\ , ax^2$ کیږي . د F_n له پاره لرو چې:

$$F_n = \frac{ax^2}{n^2}(1 + 2^2 + 3^2 + \ \ldots + n^2)\cdot\frac{x}{n}$$

$$= \frac{ax^3}{n^3}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right) = \frac{ax^3}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3} \ .$$

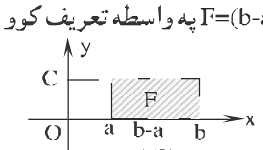
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{ax^3}{6}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^3}\right] \ .$$

$$= \frac{ax^3}{3} = \frac{a\cdot x^2\cdot x}{3} = \frac{x\cdot y}{3}$$

په همدې ترتیب د پارابول د متناظرې برخې لاندینی مساحت هم $\frac{x\cdot y}{3}$ کیږي. یعنې د پارابول د $P'OP$ منحني لاندې مساحت د $\frac{2x\cdot y}{3}$ څخه عبارت دی. دا چې $P'A'AP$ یو مستطیل دی ،د هغې مساحت $2x\cdot y$ او د پارابول د $P'OP$ د داخلي برخې مساحت

$$2x\cdot y - \frac{2x\cdot y}{3} = \frac{6x\cdot y - 2x\cdot y}{3} = \frac{4x\cdot y}{3}$$ د

کیږي.یعنې د پارابول د $P'OP$ منحني لاندې مساحت د مستطیل $\frac{1}{3}$ برخه او د $P'OP$ پارابول د منحني د ننه برخې مساحت د مستطیل $\frac{2}{3}$ برخه تشکیوي.
اوس که $f(x)>0$ یوه محدوده تابع د $[a, b]$ په انټرول کې وي، لکه څنګه مو چې په منحني باندې د مماس مفهوم د مشتق (تفاضلي حساب) په واسطه تعریف کړ .همدارنګه دلته دا ښودل کیږي چې د F مساحت څنګه تعریف شوی دی.
که چېرې $f(x)=c>0$ وي په دې حالت کې د F مساحت د $F=(b-a)\cdot c$ په واسطه تعریف کوو . **(2)** ش

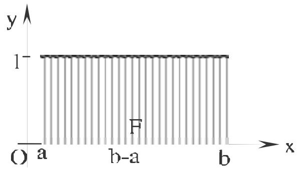


(2)ش

او که چېرې

$$f(x)=\begin{cases} 1\ ; x \in (a,b)\ ; x \in \mathbb{Q} \\ 0\ ; x \in (a,b)\ ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

په نظر کې ونیول شي ، دلته دf ګراف د موازي خطونو څخه د یو واحد په اوږدوالي ،چې یو له بله جدا او په مترا کم ډول سره پراته دي تشکیل شوی دی. (3) ش



ش(3)

ددې له پاره چې د F مساحت په ښه ډول واضح کړی شو ، نو له دې وجې په دې ځای کې د ریمان مفکوره د مساحت پیدا کولو د وضاحت په خاطر درته بیانوو

1.7 تعریف

که چیرې د [a, b] یو انترول راکړل شوی وي.

i) د $a=x_0 < x_1 < x_2 < \cdots . < x_n = b$ هر n+1 عددونه د $P=\{x_0, x_1, x_2, \ldots x_n\}$ سټ سره د $[a, b]$ له پاره یو انقسام (Partition) دی.

ii) د $1\leq k \leq n$ او $k\in \mathbb{N}$ له پاره د $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ انترول ته k ام قسمي انترول د

$$\Delta x_k = |I_k| = x_k - x_{k-1}$$

په اوږدوالي ویل کیږي.

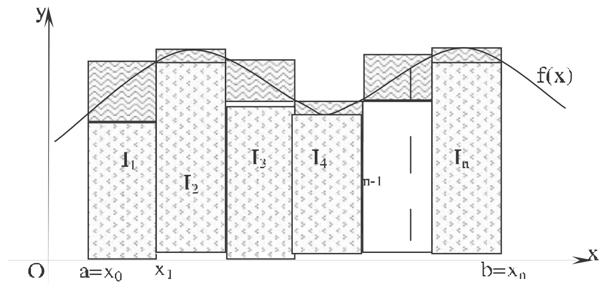
iii) د $\| P \| = max|I_k|_{,1\leq k\leq n}$ عدد ته د P پارتیشن نورم (Norm) ویل کیږي او واضح دی چې $\sum_{k=1}^{n}|I_k| = b - a$ سره دی.

2.7 تعریف

که چیرې دf تابع په $[a, b]$ کې محدوده او $P=\{x_o, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ د $[a, b]$ انترول یو انقسام وي، په دې صورت کې تعریف کوو چې :

$$m_k := \inf_{I_k} f(x) \quad \text{او} \quad M_k := \sup_{I_k} f(x) \qquad \text{(i}$$

ii) $S(P,f)= \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot |I_k|$ ته پورتنی مجموعه او $s(p,f)= \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot |I_k|$ ته لاندینی مجموعه ویل کیږي، چې د P انقسام یې د $[a, b]$ په انترول باندې منځ ته راولي. دا توابع په شکل کې د زینه شکله شکلونو دوې سلسلې رابنیي او په هغوی پورې اړوند مساحتونه په S(P,f) او s(P,f) سره ښیو ،(4)ش ته وګوری [9].



ش(4)

دلته که د انترول په انقسام کې د n عدد زيات شي د S(p,f) او s(P,f) قيمتونه يو تر بله سره نږدې کيږي او بالاخره يوه مشترک قيمت ته نږدې کيږي. دغه مشترک قيمت ته د F مساحت يا د f تابع،ريمان انتيګرال د [a, b] په انترول کې ويل کيږي. د موضوع د ښه وضاحت له پاره د سرعت او د فاصلې مسئله په نظر کې نيسو. د مثال په توګه که يو جسم په ثابت سرعت سره د وخت په راکړل شوي پريود کې حرکت وکړي، نو طی شوي فاصله د d=vt په واسطه په لاس راځي . که دمتحرک جسم سرعت ثابت نه وي ، يعنې سرعت ئې په پرله پسې توګه تغير کوونکی وي ،نو په څه ډول مونږ کولی شو چې د متحرک له خوا طی شوي فاصله حساب کړو؟.د سوال د ځواب له پاره فرضوو چې د حرکت د شروع وخت a او د انجام وخت ئېb دی او د وخت د [a, b] په انترول کې سرعت په متمادي ډول سره تغير کوي. دلته د مساحت د مسئلې په څېر د [a, b] انترول په يو شمېر معلومو فرعي انترولونو باندې وېشو، يعنې د $P=\{t_0, t_1, t_2, \dots, t_n\}$ يو پارتيشن د [a, b] له پاره په نظر کې نيسو. په دې صورت کې $I_k = [t_{k-1}, t_k]$ د وخت يو k -ام انترول دی او که په دې انترول کې

$$m_k = \min v(t) \;\wedge\; M_k = \max v(t); (f(t) = v(t))$$

وبولو،نو په k -ام انترول کې د جسم له خوا طی شوي فاصله په اعظمي ډول سره $M_k \cdot |I_k|$ او په اصغري ډول سره د $m_k \cdot |I_k|$ واحدو سره مساوي کيږي.همدارنګه،په دې انترول کې د جسم له خوا د طی شوي فاصلې(s_k) له پاره د $m_k \cdot |I_k| < s_k < M_k \cdot |I_k|$ غيرمساوات صدق کوي او مجموعي فاصله $S=s_1 + s_2 + s_3 + \dots + s_n$ کيږي.دا چې

$$m_1 \cdot |I_1| < s_1 < M_1 \cdot |I_1| \;.$$

$$m_2 \cdot |I_2| < s_2 < M_2 \cdot |I_2| \;.$$

$$m_k \cdot |I_k| < s_k < M_k \cdot |I_k| \;.$$

$$\Rightarrow m_1|I_1| + m_2|I_2| + \dots + m_k|I_k| < S < M_1|I_1| + M_2|I_2| + \dots + M_k|I_k| \;.$$

دلته دکيني خوا مجموعې ته لاندينی مجموعه (s(P,v))او د ښی خوا مجموعې ته پورتنی مجموعه (S(P,v))وائي. که د وخت([a, b]) په پارتيشن کې د n عدد زيات شي د S(P,f) (S(P,V)) او s(P,f) (s(P,v))قېمتونه یوه مشترک قېمت یعنې د S په لور نږدې کیږي . د S دغه قېمت ،د جسم له خواطی شوي فاصله د [a, b] په انترول کې راښئي . چې دا هم د ریمان مجموعې له پاره د توضیح یو ښه مثال دی.

1.7 دعوی

که چېرې $\xi_k \in I_k$ او $I(P,f)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k|$ (چې د ریمان مجموع په نوم یادیږي) وي، په دې صورت کې

$$s(P,f) \le I(P,f) \le S(P,f).$$

ثبوت

ځرنګه چې $m_k \le f(\xi_k) \le M_k$ $(k=1,2,3,\dots,n)$ دي نو :

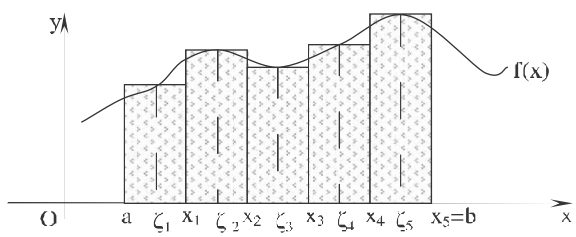
$$m_k|I_k| \le f(\xi_k)|I_k| \le M_k|I_k|$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} m_k|I_k| \le \sum_{k=1}^{n} (\xi_k)|I_k| \le \sum_{k=1}^{n} M_k|I_k|$$

یعنې

$$s(P,F) \le I(P,f) \le S(P,f)$$

.



ش(5)

3.7 تعریف

د f تابع ته د انتیګرال وړتابع ویل کیږي ،که چېرې f په [a, b] کې د تعریف وړ او محدوده وي او همدارنګه

$$\lim_{\|P\|\to 0} s(P,f) = s \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = S \in \mathbb{R}$$

موجوداو I=S=s صدق وکړي.

یعنې:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta_\varepsilon > 0\ :\ \|P\| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |I(P,f) - I| < \varepsilon.$$

4.7 دمعین انتیګرال تعریف

د f داتنګرال وړ تابع د $[a,b]$ په انترول کې په نظر کې نیول شوي ده . I ته د f تابع معین انتیګرال (The definite hntegral) د $[a,b]$ په انترول کې ویل کیږي او داسې یې لیکو :

$\int_a^b f(x)dx$.

په دې ځای کې [a, b] ته د انتیګرال انترول او b، a ته د انتګرال حدونه ویل کیږي.

.2 مثال

د f(x)=1 له پاره د [a, b] انترول په هر انقسام کې لرو چې :

s(P,f)=S(P,f)=b-a .

نو

$\int_a^b 1dx = \int_a^b dx = b - a$.

چې دا د هغه مستطیل مساحت دی، چې اوږدوالی یې b-a او پلن والی یې یو واحد دی .

.3 مثال

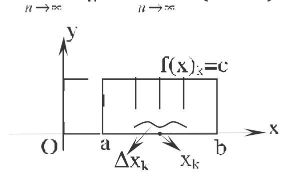
وښئی چې $\int_a^b cdx = c(b-a)$; c=const کیږي.

حل

د [a, b] انترول په n مساوي برخو ویشو .په دې صورت کې د [a, b] انترول څخه مساوي انترولونه د $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ په اوږدوالي چې شمېر یې n ته رسیږي په لاس راځي. څرنګه چې د انتیګرال لاندې تابع f(x)=c ده، نو د انترول د هر اختیاري x_k له پاره چې په k-ام انترول کې پروت دی ، لیکو چې

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)(\Delta x_k) = \sum_{k=1}^{n} c\cdot\Delta x = (c+c+c+\ldots+c)\cdot\Delta x$$
$$= n\cdot c\cdot\Delta x = n\cdot c\cdot\frac{b-a}{n} = c(b-a).$$

$$\Rightarrow \int_a^b cdx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} c(b-a) = c(b-a)$$



ش(6)

.4 مثال

د $f(x)=x^2$ له پاره پورتنی او لاندینی مجموعې د [0,1] په انترول کې په لاس راوړی، په هغه صورت کې چې د $P=\left\{0,\frac{1}{4},\frac{1}{2},1\right\}$ پارتېشن راکړل شوی وي.

حل

پورتنی پارتېشن، د $[0,1]$ انترول په لاندې درو فرعي انترولونو باندې ویشي:

$$[x_0, x_1] = \left[0, \frac{1}{4}\right] \; ; \; [x_1, x_2] = \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right] \; ; \; [x_2, x_3] = \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

او د هر یوه فرعي انترول اوږدوالی

$$\Delta x_1 = \frac{1}{4} - 0 = \frac{1}{4} \; ; \; \Delta x_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \; ; \; \Delta x_3 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \, .$$

کیږي .دا چې د f تابع په $[0,1]$ کې متزایده ده او دهر فرعي انترول په ښي انجام کې یوه اعظمي لري یعنې. $M_1 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \; ; M_2 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} \; ; M_3 = f(1) = 1$ کیږي همدارنګه د هر فرعي انترول په کیڼ انجام کې اصغري هم لري او هغه د

$$m_1 = f(0) = 0 \; ; m_2 = f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{16} \; ; m_3 = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} .$$

څخه عبارت دي. بناپردې:

$$S(P, f) = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 \; .$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{4}\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}\right) + 1\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{37}{64} \, .$$

او

$$s(P, f) = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3$$
$$= 0 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{9}{64} \; .$$

5. مثال

د $f(x)=x$ تابع او د $[a, b] = [0, b]$ انترول په نظر کې نیسو.

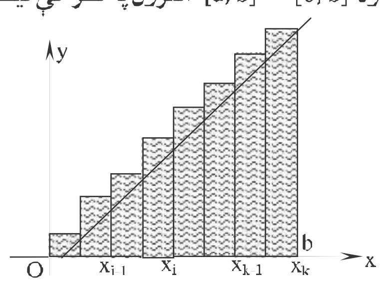
$$P_1 = \left\{0, \frac{b}{2}, b\right\}$$

$$P_2 = \left\{0, \frac{b}{4}, \frac{b}{2}, \frac{3}{4}b, b\right\}$$

$$\vdots$$

$$P_i = \left\{\frac{b}{2i} \cdot j / j = 0,1, \ldots, 2i\right\}.$$

$$\Rightarrow \lim_{i \to \infty} \| P \| = 0 \; .$$



ش(7)

اوس که چېرې $P_i = P$ وي، لرو چې

$$m_k = \inf(f(x)) = \frac{b}{2i}(k-1) \; ; \; M_k = \frac{b}{2i} \cdot k \, ; \; k = 1,2,3 \ldots, 2i$$

$$\Rightarrow s(P,f) = \sum_{k=1}^{2i} m_k |I_k| = \sum_{k=1}^{2i} \frac{b}{2i}(k-1)\cdot\frac{b}{2i} = \frac{b^2}{4i^2}\sum_{k=1}^{2i}(k-1)$$

$$= \frac{b^2}{4i^2}\cdot\frac{(2i-1)\cdot 2i}{2} = \frac{b^2}{4i^2}\cdot\frac{4i^2-2i}{2} = \frac{b^2}{4i^2}(2i^2-i) = \frac{b^2}{4}\left(2-\frac{1}{i}\right).$$

$$S(P,f)= \sum_{k=1}^{2i} M_k |I_k| = \sum_{k=1}^{2i} \frac{b}{2i}(k)\cdot\frac{b}{2i} = \frac{b^2}{4i^2}\sum_{k=1}^{2i}(k)$$

$$= \frac{b^2}{4i^2}\cdot\frac{(2i+1)\cdot 2i}{2} = \frac{b^2}{4i^2}\cdot\frac{4i^2+2i}{2} = \frac{b^2}{4i^2}(2i^2+i) = \frac{b^2}{4}\left(2+\frac{1}{i}\right)$$

$$\Rightarrow \lim_{i\to\infty} s(P,f) = \frac{2b^2}{4} = \frac{b^2}{2} = \lim_{i\to\infty} S(P,f) \quad .$$

چې دا هم د (7) شکل مطابق د مثلث د مساحت سره مطابقت لري . یعنې $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2}$ کیږي .

6. مثال

د f تابع په لاندې ډول راکړل شوي ده

$$f(x) = \begin{cases} 1 ; x \in [a,b] ; x \in \mathbb{Q} \\ 0 ; x \in [a,b] ; x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

دلته د $[a,b]$ انترول ،د P هر انقسام له پاره لرو :

$s(P,f)=0$; $S(P,f)=b-a$.

نو وایو چې دا تا بع په [a, b] کې د انتګرال وړتیا نه لري.

2.7 دعوی (د ریمان انتیګرال د وړتیا شرطونه)

د f تابع د $[a,b]$ په انترول کې د انتیګرال وړتیا لري ،که چېرې او یوازې که چېرې د $\forall\varepsilon > 0$ له پاره د P یو انقسام موجود وي داسې چې :

$S(P,f)-s(P,f)< \varepsilon$.

ثبوت

که چېرې P د $[a,b]$ انترول یو انقسام وي ، چې د هغې له پاره $S(P,f)-s(P,f)< \varepsilon$ صدق کوي. نو د

$0\leq S(P,f) - s(P,f) \leq \varepsilon$

څخه په لاس راځي چې f د انتیګرال وړتیا لري . یعنې د

$\lim_{|P|\to\infty} S(P,f) = \lim_{|P|\to\infty} s(P,f) = S$.

خاصیت صدق کوي. ددې برعکس فرضوو چې د f تابع په [a, b] کې د انتیګرال وړتیا لري او $\varepsilon > 0$ دی.
نو په دې صورت کې د P یو پارتېشن ممکن دی ، چې د هغې له پاره

$\left|S(P,f) - \int_a^b f(x)dx\right| <\frac{\varepsilon}{2}$.

$\left|s(P,f) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$.

صدق کوي. پنا پردې لیکو چې

$$S(P,f)-\int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \ .$$

$$s(P,f)-\int_a^b f(x)dx > -\frac{\varepsilon}{2} \ .$$

په نتیجه کې

$$S(P,f)-s(P,f)=S(P,f)-\int_a^b f(x)dx + \int_a^b f(x)dx - s(P,f) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

او له دې ځایه څخه دعوی په ثبوت رسیږي. ■

3.7 دعوی

که چیرې د f تابع د $[a,b]$ په انترول کې مونوتون وي ،نو fد $[a,b]$ په انترول کې د انتیگرال وړتیا لري.

ثبوت

دلته دعوی د مونوتون متزاید له پاره ثبوت کوو او د مونوتون متناقص حالت ثبوت ،هم د مونوتون متزاید حالت په شان دی.

که چیرې f مونوتون متزایده وي ،په دې صورت کې د $[a,b]$ انترول ،د P هر انقسام له پاره لیکو چې:

$$S(P,f)-s(P,f)=\sum_{k=1}^{n}(M_k-m_k)|I_k|<\|p\|\sum_{k=1}^{n}(f(x_k)-f(x_{k-1}))$$

$$=\| P \| \ (f(b)-f(a)) \ .$$

که چیرې $f(a)=f(b)$ شي ، نو $S(P,f)=s(P,f)$ سره دی. او که $f(a)<f(b)$ وي ، په دې صورت کې د هر $\varepsilon>0$ له پاره د انترول انقسام یعنيP داسې انتخاب کوو چې $\| P \|< \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ صدق وکړي . په نتیجه کې لیکو چې

$$S(P,f)-s(P,f)<\| P \| \left(f(b)-f(a)\right) < \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}\cdot\left(f(b)-f(a)\right)=\varepsilon \ ■$$

7.مثال

د پورتني د عوې د تطبیق په اساس د $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{\left[\frac{1}{x}\right]} & ; x\in(0,1)\\ 0 & ; x=0\end{cases}$ تابع دانتیگرال وړتیا مطالعه کوو . دلته د $f(x)$ تابع مونوتون متزایده ده او

$$x_1<x_2 \Rightarrow \left[\frac{1}{x_1}\right] \ge \left[\frac{1}{x_2}\right] \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2) \ .$$

کیږي.بنا پردې پورتنی تابع د انتیگرال وړتیا لري.

4.7 دعوی

که f د [a, b] په انترول کې متمادي وي نو هغه د انتیګرال وړ ده

څرنګه چې د f تابع په [a, b] کې متمادي ده، نو د هر $\varepsilon > 0$ له پاره یو $\delta_\varepsilon > 0$ شته، داسې چې $M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$ وي. په هغه صورت کې چې د [a, b] انترول د I_k په قسمي انترولونو داسې چې $|I_k| < \delta_\varepsilon$ صدق وکړي ،تجزیه شي.
بنا پردې لیکو چې :

$$S(P,f)-s(P,f)=\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)|I_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}|I_k| < \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a)=\varepsilon$$

په نتیجه کې $S(P,f)-s(P,f)<\varepsilon$ کیږي نو د f تابع د انتیګرال وړ ده. ■

د انتیګرال خواص

دا چې $\int_a^b f(x)dx$ د a<b له پاره تعریف شوی دی او د $a \geq b$ له پاره لاندې تعریف په نظر کې نیسو :

5.7 تعریف

i) که f په a کې د تعریف وړ وي.

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad .$$

ii) که a>b او f په [a, b] کې د انتیګرال وړتیا ولري

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \quad .$$

5.7 دعوی

که چیرې f او g په [a, b] کې د انتیګرال وړتیا ولري او $c \in \mathbb{R}$ وي ، نو

i) د cf تابع په [a, b] کې د انتیګرال وړتیا لري او $\int_a^b (c \cdot f(x))\,dx = c\int_a^b f(x)dx$.

ii) د f+g تابع د [a, b] په انترول کې د انتیګرال وړتیا لري ،او

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \,.$$

ثبوت

i) د c=0 له پاره مسئله واضح ده. که $c \neq 0$ وي نو

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta_\varepsilon > 0 \quad \left|I(P,f) - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{|c|} \,.$$

او د هر پارتیشن P له پاره چې $\| P \| < \delta_\varepsilon$ او $\xi_k \in I_k$ وي .لرو چې

$$\Rightarrow\left|\sum_{a}^{b} f(\xi_k) I_k - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{|c|}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n}[cf(x_k)]|I_k| - c\int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \int_a^b (cf(x))dx = c\int_a^b f(x)dx \ .$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta_\varepsilon > 0, \left|\sum_{k=1}^{n} f(x_k)|I_k| - \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad . \qquad \text{(ii}$$

د P هر انقسام(پارټیشن) له پاره دا سې چې $\xi_k \in I_k$ ، $\| P \| < \delta_\varepsilon^f$ وي ، صدق کوي. همدارنګه د P د هر انقسام یعني $\xi_k \in I_k$, $\| P \| < \delta_\varepsilon^g$, $\xi_k \in I_k$ له پاره لیکو چې:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|I_k| - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

اوس که چېرې $\delta_\varepsilon = min(\delta_\varepsilon^f, \delta_\varepsilon^g)$ انتخاب شي ، په دې صورت کې دP د هر انقسام له پاره په هغه صورت کې چې $\| P \| < \delta_\varepsilon$ وي لرو چې:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}(f(\xi_k) + g(\xi_k))|I_k| - (\int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx)\right|$$
$$\leq \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)|I_k| - \int_a^b f(x)dx\right| + \left|\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)|I_k| - \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \ \blacksquare$$

6.7 دعوی

که چېرې د f او g توابع د [a, b] په انترول کې د انتیګرال وړتیا ولري او f(x)≤ g(x) وي ، نو
$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

ثبوت

د پورتنی قضیې له مخې لیکو چې د h=g-f تابع د [a, b] په انترول کې د انتیګرال وړتیا لري او د [a, b] انترول د P انقسام له پاره لیکو چې:

$$I(p,h) = \sum_{k=1}^{n} h(\xi_k)|I_k| \geq 0$$

بنا پردې $\int_a^b h(x)dx \geq 0$ کیږي.

$$\Rightarrow \int_a^b h(x)dx = \int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

$\Rightarrow \int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx$. ■

6.7 تعریف

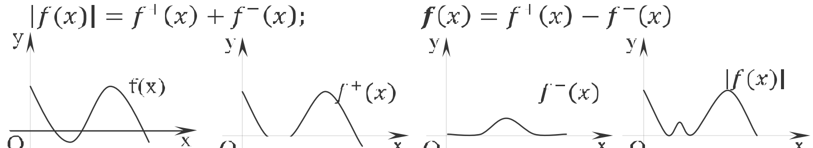
که چېرې د f تابع په [a, b] کې د تعریف وړ وي، تعریف کوو چې

$$f^{+}(x) := \begin{cases} f(x)\ ;\ f(x) \geq 0 \\ 0\ ;\ f(x) < 0 \end{cases}$$

$$f^{-}(x) := \begin{cases} -f(x)\ ;\ f(x) < 0 \\ 0\ ;\ f(x) \geq 0 \end{cases} .$$

نو

$|f(x)| = f^{+}(x) + f^{-}(x);$ $\quad f(x) = f^{+}(x) - f^{-}(x)$



ش(8_a) ش(8_b) ش(8_c) ش(8_d)

7.7 دعوی

که چېرې د f تابع په [a, b] کې د انتیګرال وړتیا ولري، نو f^{+} او f^{-} هم د انتیګرال وړتیا لري.

ثبوت دلته دعوی د f^{+} له پاره ثبوت کوو او د f^{-}له پاره ئې ثبوت د f^{+} په شان دی :

$$M_k^{+} = \sup_{I_k}\left(f^{+}(x)\right)\ ;\ \ m_k^{+} = \inf_{I_k}\left(f^{+}(x)\right)$$

څرنګه چې $M_k^{+} \leq M_k\ ;\ m_k^{+} \geq m_k$ دی، مومو چې :

ش(9)

$$M_k^{+} - m_k^{+} \leq M_k - m_k$$

$$\sum_{k=1}^{n}(M_k^{+} - m_k^{+})|I_k| \leq \sum_{k=1}^{n}\left(M_k - m_k\right)|I_k|$$

$$\Rightarrow S(P, f^{+}) - s(P, f^{+}) \leq S(P, f) - s(P, f) < \varepsilon$$

چې په دې ترتیب د f^{+} له پاره دعوی په ثبوت رسیږي. ■

8.7 دعوی

که چېرې د f تابع په [a, b] کې د انتیگرال وړتیا ولري ، نو $|f|$ هم د انتیگرال وړتیا لري.او

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\ .$$

کیږي.

ثبوت

څرنګه چې f د انتیګرال وړده، نو د f^+ او f^- توابع هم د انتیګرال وړتیا لري بنا پردې د

$$|f(x)| = f^+(x) + f^-(x)$$

تابع دانتیګرال وړدی او

$$\int_a^b |f(x)|dx = \int_a^b f^+(x)\,dx + \int_a^b f^-(x)dx$$

کیږي. همدارنګه لرو چې

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \ge \int_a^b f^+(x)dx - \int_a^b f^-(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

او

$$\int_a^b |f(x)|\,dx \ge -\int_a^b f^+(x)dx + \int_a^b f^-(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

چې په نتیجه کې

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx\quad . \blacksquare$$

همدارنګه که چېرې د f او g توابع په [a, b] کې داتنیګرال وړ وي ، نو ددوی د ضرب حاصل یعنې f·g هم د انتیګرال وړتیا لري. متوجه باید واوسو چې په عمومي ډول سره

$$\int_a^b (f(x)\cdot g(x))dx \ne \int_a^b f(x)dx \cdot \int_a^b g(x)dx\ . \blacksquare$$

د مثال په توګه که د $f(x) = g(x) = 1$ توابع د [0,2] په انترول کې په نظر کې ونیسو لیکو چې

$$\int_0^2 \big(f(x)\cdot g(x)\big)dx = \int_0^2 1\cdot dx = 2\ .$$

$$\int_0^2 f(x)dx\cdot\int_0^2 g(x)dx = \int_0^2 dx\cdot\int_0^2 dx = 2\cdot 2 = 4\ .$$

$$\Rightarrow \int_0^2 \big(f(x)\cdot g(x)\big)dx\,dx \ne \int_0^2 f(x)dx\cdot\int_0^2 g(x)dx\ .\ [34]$$

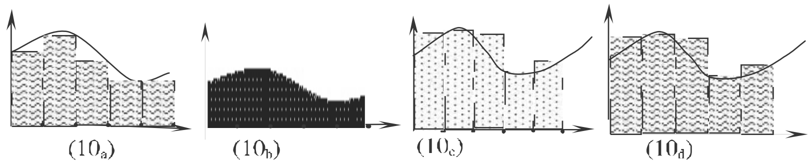
9.7 دعوی

د f متمادي تابع اود P،Q پارتیشنونه د [a, b] په انترول کې راکړل شوي دي. داسې چې $P\subseteq Q$ دی. نو $s(P,f)\le s(Q,F)$ او $S(Q,f)\le S(P,f)$ کیږي.

ثبوت د دعوې ثبوت د **شکل له مخې** په ښکاره ډول سره واضح دی. ■

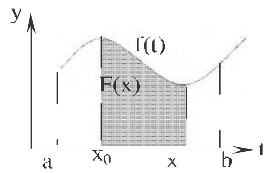
یعنې که په پارتیشن کې د نقطو شمېر زیات شي په دې صورت کې د فرعي انترولونو یعنې$[x_{i-1}, x_i]$ اوږدوالی کوچنی کیږي، m_i دزیاتیدواو M_i د کمیدو په لور درومي.یعنې لاندینی مجموعه دلوییدو او

پورتنی مجموعه د کمیدو په لور درومي. چې دا مفهوم د یوې مثبتې تابع له پاره صدق کوي. (10)ش ته وګوری.



(10)ش

دلته په پارتېشن کې د نقطو په اضافه کیدو سره لاندینی مجموعه د زیاتېدو او پورتنی مجموعه د کمیدو په لور درومي او با لاخره (11)ش ځانته غوره کوي ■.



ش (11)

10.7 دعوی

که چېرې f د [a, b] په انترول کې متمادي ا و $a< c < b$ وي ، نو:

$$\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \quad .$$

ثبوت

د دعوې د ثبوت له پاره یوازې دې ته ضرورت لرو چې د [a, b] د P هر پارتېشن له پاره

$$s(P, f) \le \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \le S(P,f)$$

صدق کوي. مطلب ته د رسیدو په خاطر د [a, b] د $P=\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ اختیاري پارتېشن په نظر کې نیسو. ځرنګه چې د $Q=P\cup\{c\}$ پارتېشن د P پارتېشن په ځان کې لري او د 9.7 دعوې له مخې لیکو چې :

$$s(P,f) \le s(Q,f) \ \wedge \ S(Q,f) \le S(P,f) \qquad (1)$$

همدارنګه د $Q_1 = Q\cap[a,c]$ او $Q_2 = Q\cap[c,b]$ ستپونه په ترتیب سره د [a,c] او [c, b] پارتېشنونه دي او برسبره پر دې پوهیږو چې

$$s(Q_1,f) + s(Q_2,f) = s(Q,f) \ \wedge \ S(Q_1,f) + S(Q_2,f) = S(Q,f)$$

ځرنګه چې

$$s(Q_1,f) \le \int_a^c f(t)dt \le S(Q_1,f)$$

$$s(Q_2,f) \le \int_c^b f(t)dt \le S(Q_2,f)$$

$$\Rightarrow s(Q_1,f)+s(Q_2,f) \le \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \le S(Q_1,f) + S(Q_2,f)$$

$$\Rightarrow s(Q,f) \le \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \le S(Q,f.$$

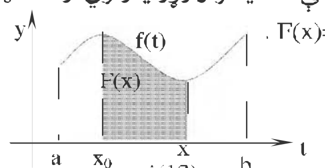
نو د (1) رابطې له مخې ليکو چې:

$$s(P,f) \le (\int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt \le S(P,f) \quad .$$

$$\Rightarrow \int_a^c f(t)dt + \int_c^b f(t)dt = \int_a^b f(t)dt \quad . \blacksquare$$

7.7 تعريف

که چېرې I يو انترول او د f تابع د $[a,b] \subset I$ په هر انترول کې د انتيګرال ورتياولري او $x_0 \in I$ وي، نو د F تابع چې D(F)=I دی ، داسې تعريف کوو: $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(t)dt$.



ش(12)

11.7 دعوی

د f تابع د I په انترول کې متمادي ده.

ثبوت که چېرې $x \in [a,b] \subseteq I$ وي، نو د $[a,b]$ په انتروال کې د M يوه ثابت له پاره لرو چې $|f(x)| < M$. نو که چېرې $\{x_n\}$ د $[a,b]$ په انترول کې يو ترادف وي چې $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ دی. په دې صورت کې

$$|F(x_n) - F(x)| = \left|\int_{x_0}^{x_n} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt\right| = \left|\int_{x}^{x_n} f(t)dt\right|$$

$$\le \left|\int_{x}^{x_n} |f(t)|dt\right| \le |x_n - x| \cdot M < \varepsilon.$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} F(x_n) = F(x) \,. \blacksquare$$

نوټ

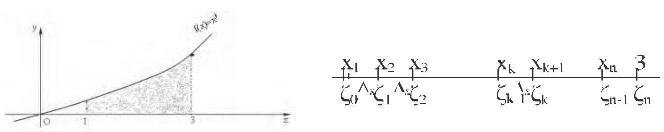
دمساحت او انتيګرال تر منځ رابطې د لاسته راوړلو په خاطر لاندې مثال په نظر کې نيسو .

8. مثال

د $\int_1^3 x^3\,dx$ اتيګرال حساب کوو. يعني د هغې سطحې مساحت پيدا کوو چې د $f(x)=x^3$ د منحني لاندې د x محور ، x=1 او x=3 پواسطه محدود شوی وي.

حل

دلته د $1 \le x \le 3$ يعنې د [1,3] انترول په n مساوي انترولونو باندې چې طول يې $\Delta x = \frac{2}{n}$ دی، ويشو. ش(13)



(13)

اوله طریقه

د شکل له مخې پوهېږو چې

$$x_1 = 1\,, x_2 = 1 + \Delta x\,, \dots\,, x_n = 1 + (n-1)\cdot\Delta x \;.$$

نو لرو چې

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f\,(x_k)\cdot\Delta x_k = x_1^3\cdot\Delta x + x_2^3\cdot\Delta x + \dots + x_n^3\cdot\Delta x$$

$$= \{1 + (1+\Delta x)^3 + (1+2\Delta x)^3 + \cdots + \lfloor(1+(n-1)\Delta x\rfloor^3\}\cdot\Delta x\cdot$$

$$=\{n + 3\lceil 1 + 2 + \cdots + (n-1)\rceil\cdot\Delta x + 3\lceil 1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\rceil\cdot(\Delta x)^2$$

$$+\lfloor 1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\rfloor\cdot(\Delta x)^3\}\cdot\Delta x\;.$$

$$=\left[n + 3\cdot\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\cdot\frac{2}{n} + 3\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\cdot2\cdot3}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2\cdot n^2}{(1\cdot2)^2}\cdot\left(\frac{2}{n}\right)^3\right]\cdot\frac{2}{n}$$

$$=2+\left(6-\frac{6}{n}\right)+\left(8-\frac{12}{n}+\frac{4}{n^2}\right)+\left(4-\frac{8}{n}+\frac{4}{n^2}\right)$$

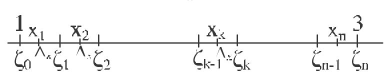
$$=20-\frac{26}{n}+\frac{8}{n^2} = 20\;.$$

$$\Rightarrow \int_1^3 x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\left(20-\frac{26}{n}+\frac{8}{n^2}\right) = 20\,.$$

دوهمه طریقه

په پورته طریقه کې x_k د فرعي انترول د کینې خوا پای وه. اوس x_k د فرعي انترول، نیمایئ نقطه ټاکو.

لرو چې



$$x_1 = 1 + \frac{1}{2}\cdot\Delta x\;; x_2 = 1 + \frac{3}{2}\cdot\Delta x; \dots ; x_n = 1 + \frac{2n-1}{2}\cdot\Delta x\;.$$

نو

$$S_n = \left[\left(1+\frac{1}{2}\cdot\Delta x\right)^3 + \left(1+\frac{3}{2}\Delta x\right)^3 + \cdots + \left(1+\frac{2n-1}{2}\Delta x\right)^3\right]\cdot\Delta x$$

$$=\left\{\left[1 + 3\cdot\frac{1}{2}\Delta x + 3\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^3\cdot(\Delta x)^3\right] + \left[1 + 3\left(\frac{3}{2}\right)\Delta x\right) + +3\left(\frac{3}{2}\right)^2(\Delta x)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^3(\Delta x)^3\right] + \cdots + + \left[1 + 3\left(\frac{2n-1}{2}\right)\Delta x + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^2\cdot(\Delta x)^2 + \left(\frac{2n-1}{2}\right)^3\cdot(\Delta x)^3\right]\right\}\cdot\Delta x + \dots$$

$$=n\cdot\frac{2}{n} + \frac{3}{2}\cdot n^2\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{1}{4}(4n^3-n)\left(\frac{2}{n}\right)^3 + \frac{1}{8}(2n^4-n^2)\left(\frac{2}{n}\right)^4$$

$$=2+6+\left(8-\frac{2}{n^2}\right)+4\left(-\frac{2}{n^2}\right)=20-\frac{4}{n^2}$$

$$\Rightarrow \int_1^3 x^3 = \lim_{n\to\infty}\left(20-\frac{4}{n^2}\right) = 20.$$

12.7 د معين انتيګرال له پاره د وسطي قیمت دعوی

که چیرې د f تابع د [a, b] په انترول کې متمادي وي ، په دې صورت کې

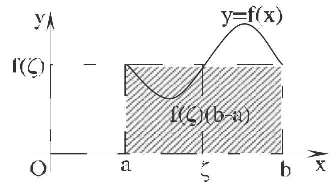
$\exists\xi\epsilon(a, b) \quad \int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$

کیږي

ثبوت

د $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ د اشتقاق وړ تابع له پاره د تفاضلي حساب د وسطي قیمت دعوې له مخې لیکو چې :

یو $\xi\ \epsilon(a, b)$ موجود دی داسې چې$\left(\frac{F(b)-F(a)}{b-a} = F'(\xi)\right)$ صدق کوي.



ش(14)

بناپردې $F'(\xi)(b-a) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)dt \Rightarrow \int_a^b f(t)dt = f(\xi)(b-a)$. ځکه چې $F'(x) = f(x)$ کیږي. ■

13.7 دعوی (د وسطي قیمت دوهمه دعوې یا د 12.7 دعوې تعمیم شوی شکل)

که چیرې د f تابع په [a, b] کې متمادي ،g د انتیګرال وړاو $g(x)\geq 0$ وي، په دې صورت کې یو $\xi\epsilon(a, b)$ داسې موجود دی چې:

$$\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx.$$

ثبوت

پوهیږو چې

$$\inf_{[a,b]}(f(x)\cdot g(x) \leq f(x)\cdot g(x) \leq \sup_{[a,b]}(f(x)\cdot g(x)$$

$$\operatorname{Inf}_{[a,b]}(f(x)\cdot\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq \sup_{[a,b]}(f(x)\int_a^b g(x)dx\cdot$$

که $\int_a^b g(x)dx = 0$ وي په دې صورت کې:

$$0=\inf_{[a,b]}(f(x))\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx \leq \sup_{[a,b]}\left(f(x)\right)\int_a^b g(x)dx.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx\ ; \forall\xi\epsilon(a,b)$$

کیږي او که چېرې $\int_a^b g(x)dx > 0$ وي په دې صورت کې د $c = \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx}$ عدد په نظر کې نیسو.

پوهیږو چې:

$$\Rightarrow \inf_{[a,b]} (f(x) \leq \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq \sup_{[a,b]} (f(x) \cdot$$

$$\Rightarrow \inf_{[a,b]} (f(x) \leq c \leq \sup_{[a,b]} (f(x) \cdot$$

ځرنګه چې f په [a, b] کې متمادي دی نو یو $\xi\epsilon(a,b)$ موجود دی چې $f(\xi)=c$ کیږي.

$$\Rightarrow \frac{\int_a^b f(x)\cdot g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} = c = f(\xi) \Rightarrow \int_a^b f(x)\cdot g(x)dx = f(\xi)\int_a^b g(x)dx. \blacksquare$$

14.7 دعوی

که $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt$ وي ، نو $F'(x) = f(x)$ کیږي.

ثبوت

لرو چې:

$$F(x+\Delta x) - F(x) = \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_{x_0}^{x} f(t)dt$$

$$= \int_{x_0}^{x} f(t)dt + \int_{x}^{x+\Delta x} f(t)dt + \int_{x}^{x_0} f(t)dt$$

$$= \int_{x_0}^{x+\Delta x} f(t)dt = f(x_0)\cdot\Delta x \ \ ; \ x < x_0 < x + \Delta x$$

ځکه چې د f تابع متمادي ده او د انتیګرال د متوسط قیمت دعوې له مخې پورتنی نتیجه په لاس راځي.

یعنې

$$\Rightarrow \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = f(x_0)$$

$$\Rightarrow F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x)-F(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0) = f(x) \ .$$

دلته $x<x_0 < x + \Delta x$ دی او کله چې $\Delta x \to 0$ تقارب وکړي $x \to x_0$ ته تقارب کوي. دا خاصیت چې که $F(x)=\int_{x_0}^x f(t)dt$ وي نو $F'(x) = f(x)$ صدق کوي. ■[33]

8.7 تعریف

که چېرې د f او F توابع د I په انترول کې د تعریف وړ، F په I کې مشتق منونکي او $F'(x) = f(x)$ وي، نو F ته د f اولیه تابع ویل کیږي.

نتيجه

د پورتنی دعوې څخه په لاس راځي چې د f هره متمادي تابع د يوې اوليه تابع لرونکي ده. ځکه چې د $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$ تابع د اشتقاق وړ او $F'(x) = f(x)$ دی. نو له دې وجې يوه تابع څو مختلفې اوليه توابع لرلی شي او يوازې د هغوی فرق په يوه ثابت کې دی.

15.7 دعوی

که F_1 او F_2 دF دوې اوليه تابع دI په انترول کې وي، په دې صورت کې د c يو ثابت وجود لري چې
$F_1(x) = F_2(x) + c$

کيږي.

ثبوت

د $\varphi(x) := F_1(x) - F_2(x)$ تابع له پاره دI په انترول کې لرو چې :

$$\varphi'(x) = F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = c \quad \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = c \Rightarrow F_1(x) = F_2(x) + c. \blacksquare.$$

16.7 دعوی

که چېرې د f تابع په [a,b] کې متمادي او د هغه اوليه تابع F وي، نو

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)\,.$$

ثبوت

د $F_1(x) = \int_a^x f(t)dt$ تابع دf يوه اوليه تابع د $[a, b]$ په انترول کې ده. ، بنا پردې :

$$F_1(x) = F(x) + c$$

که x=a شي ، نو

$$0=\int_a^a f(t)dt = F_1(a) = F(a) + c \Rightarrow c = -F(a)\,.$$

او د x=b له پاره مومو چې :

$$\int_a^b f(t)dt = F_1(b) = F(b) + c\,.$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(t)dt = F_1(b) = F(b) - F(a).$$

چې اکثراً ئې داسې ليکي :

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b \; = F(b) - F(a). \blacksquare$$

9. مثال

د a>1 له پاره د $\int_1^a \frac{dx}{x}$ انتيگرال حساب کوو :

حل

د $f(x)=\frac{1}{x}$ له پاره یوه اولیه تابع د $F(x)=\ln x$ څخه عبارت ده. نو:

$$\int_1^a \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^a = \ln a - \ln 1 = \ln a.$$

10. مثال

$$\int_1^3 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4}\right]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20\,. \qquad (i$$

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = [\ln x]_a^b = \ln b - \ln a = \ln\frac{b}{a}\,;\quad 0 < a \le b \qquad (ii$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = [\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1 \qquad (iii$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin x\, dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} = -\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - 0\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \qquad (iv$$

2. غیر معین انتیګرال

په **1.7** کې د معین انتیګرال په مفهوم باندې ښه پوه شوو . ددې له پاره چې د اولیه تابع په موندلو کې مو ښه لاس رسی پیدا کړی وي نو لازمه ده چې په غیر معین انتیګرال او د انتیګرال نیولو په طریقو باندې ځانونه پوه کړو .

9.7 تعریف

که f د I په انترول کې تعریف شوي او په I کې د یوې اولیه تابع لرونکي وي.

i) د f تابع له پاره غیر معین انتیګرال داسې تعریف کیږي :

$\int f(x)dx = \{\, F$; د f اولیه تابع په I کې ده $F \,\}$

نوټ

که F_1 د f اولیه تابع وي په دې صورت کې د $F=F_1+c$; $(c\in\mathbb{R})$ تابع هم د f یوه اولیه تابع ده.

ii) که چېرې $F_1 \in \int f(x)dx$ وي داسې ئې لیکو: $\int f(x)dx = F_1(x) + c\,;\, c\in\mathbb{R}$.

11. مثال

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad ; c\in\mathbb{R}\,. \quad I=(0,\infty) \quad ; \quad \alpha\neq -1 \qquad (i$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + c\,. \qquad I=(0,\infty) \quad ; \quad c\in\mathbb{R}\,. \qquad (ii$$

$$\int e^x dx = e^x + c. \qquad I=(-\infty,\infty) \quad ; \quad c\in\mathbb{R}\,. \qquad (iii$$

$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2} + c. \quad I = (-1,1) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}.$ (iv

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c. \quad I = (0, \infty) \quad ; \quad c \in \mathbb{R}$ (v

دغیر معین انتیګرال ځنې اسا سي فرمولونه

دا داسې فرمولونه دي چې د مشتق د فصل څخه په استفادې سره په لاس راځي او د انتیګرال ګیری په وخت کې په مستقیمه توګه ورڅخه ګټه اخیستل کیږي اوپه لاندې ډول دي

$\int \frac{d}{dx}[f(x)]dx = f(x) + c$ .1

$\int [f(x) + g(x)]\, dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx.$ .2

$\int a\, f(x)dx = a \int f(x)dx.$ .3

$\int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\ ;\ m \neq -1$ .4

$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c.$ .5

$\int e^x\, dx = e^x + c.$ .6

$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{\ln a} + c; a > 0\ ; a \neq 1.$ .7

$\int \sin x\, dx = -\cos x + c.$ .8

$\int \cos x dx = \sin x + c.$ .9

$\int \tan x\, dx = \ln|\cos x| + c.$ .10

$\int \cot x dx = \ln|\sin x| + c.$ .11

$\int \sec x\, dx = \ln|\sec x + \tan x| + c$ .12

$\int \csc x\, dx = \ln|\csc x - \cot x| + c.$ .13

$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + c.$ .14

$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + c.$ .15

$\int \sec x \cdot \tan x\, dx = \sec x + c.$ .16

$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \arctan\frac{x}{a} + c.$ .17

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + c.$ .18

$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + c.$ .19

$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c.$ .20

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + c.$ .21

$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c.$ .22

$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2}a^2 \arc\sin\frac{x}{a} + c.$ .23

$\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 + a^2}\right| + c.$ .24

$\int \sqrt{x^2 - a^2}dx = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2}a^2\ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + c.$ .25

17.7 دعوی

که چېرې F او G په ترتیب سره د f او g اولیه تابع ($c_1, c_2 \in \mathbb{R}$) وي، په دې صورت کې

$c_1f(x) + c_2g(x)$ هم اولیه تابع لري او

$\int\left(c_1f(x) + c_2g(x)\right)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int g(x)dx$

$= c_1F(x) + c_2G(x) + c$.

کیږي.

ثبوت

څرنګه چې $F\in \int f(x)dx$ او $G\in \int f(x)dx$ کیږي. نو

$(F+G)\in \left(\int f(x)dx + \int g(x)dx\right)$

$\Rightarrow F + G \in \int\left(f(x) + g(x)\right)dx.$

$\Rightarrow (F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x).$

$\Rightarrow (c_1F + c_2G)'(x) = c_1F'(x) + c_2G'(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$

$\Rightarrow \int\left(c_1f(x) + c_2g(x)\right)dx = c_1\int f(x)dx + c_2\int g(x)dx.$ ■

د پورتنیو دعوو په مرسته کولی شو چې د اکثرو توابعو غیر معین انتیګرال په لاس راوړو.

12.مثال

$P(x)=\sum_{i=0}^{n} a_ix^i;\quad a_i \in \mathbb{R} \Rightarrow \int P(x)dx = \sum_{i=0}^{n}\frac{a_i}{i+1}x^{i+1}\quad; (i \neq -1)$

13. مثال

i) د $f(x) = 3 - \frac{1}{2}x$ له پاره د ريمان مجموعه په $2 \leq x \leq 14$ انترول کې د شپږو فرعي انترولونو په نظر کې نيولو سره پيدا کړئ

ii) که $f(x) = \sqrt{x} - 2$ او $1 \leq x \leq 6$ وي د ريمان مجموعه د n=5 له پاره تر شپږو اعشاري رقمونو پورې پيدا کړئ.

iii) ثبوت کړئ چې $\int_a^b x dx = \frac{b^2-a^2}{2}$ کيږي.

iv) ثبوت کړئ چې $\int_a^b x^2 dx = \frac{b^3-a^3}{2}$ کيږي

v) د $\int_2^6 \frac{x}{1+x^2} dx$ انتيګرال د ريمان مجموعې د ليمېټ په شکل وليکئ.

vi) د $\int_1^{10} (x - 4\ln x) dx$ انتيګرال د ريمان مجموعې د ليمېټ په شکل وليکئ. (کورنۍ دنده)

3. د انتيګرالونو د موندلو طريقې

د $\int_a^b f(x) dx$ د موندلو له پاره لازمه ده چې اول د f له پاره يوه اوليه تابع په لاس راوړو او د هغې وروسته بيا د معين انتيګرال په پيدا کولو باندې شروع کوو. نو لازمه ده چې لومړی د اوليه تابع د موندلو له پاره ځنې طريقې وړاندې کړو، کوم چې د هغې په مرسته وکولی شو چې مغلق انتيګرالونه حل او يا په ساده شکلونو باندې واړول شي.

18.7 دعوی (د انتيګرال نيونې تعويضي طريقه)

که چېرې $x=g(t)$ د I په انترول کې د اشتقاق وړ، $g'(t)$ په هغې کې متمادي او د $f(x)$ تابع د $g(I)$ په انترول کې متمادي وي. په دې صورت کې

$$\int f(x) dx \,|_{x=g(t)} = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) dt. \quad \text{(i}$$

ii) که چېرې $g'(t) \neq 0$ وي، نو

$$\int f(x)\, dx = \int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t) dt \,\,|_{t=g^{-1}(x)}.$$

ثبوت

i) فرضوو چې F د f يوه اوليه تابع ده. يعنې

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x).$$

بنا پردې د مشتق د زنځيري قاعدې په اساس ليکو چې:

$$\frac{dF(g(t))}{dt} = \frac{d(F(g(t))}{dg(t)} \cdot \frac{dg(t)}{dt} = f\big(g(t)\big) \cdot \frac{dg(t)}{dt}.$$

معلومیږي چې $\Gamma(g(t))$ د $f(g(t))\cdot\frac{dg(t)}{dt}$ یوه اولیه تابع ده او په دې ترتیب د دعوې د i) برخې ثبوت پای ته رسیږي.

ii) څرنګه چې $g'(t) \neq 0$ دی . په دې صورت کې g په I کې مونوتون ده او د g له پاره معکوسه تابع وجود لري. بنا پر دې د دعوې د ii)برخې ثبوت د i) برخې څخه په لاس راځي. یعنې که په i) حالت کې $t=g^{-1}(x)$ وضع شي دوهم حالت په لاس راځي لیکو چې :

$$\int f(x)dx = \int f\big(g(t)\big)\cdot\frac{dg(t)}{dt}\,dt\ \big|_{t=g^{-1}(x)}\quad [4]\ \blacksquare$$

14. مثال

i) د $\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$ انتیګرال حساب کړی .

ii) د $\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}dx$ انتیګرال حساب کړی.

حل

که چېرې $1\text{-}x^2 = t = g^{-1}(x)$ وضع شي، لیکو چې :

(i
$$\int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = -\frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{t}}\ \big|_{t=1-x^2}$$
$$= -\sqrt{t}+c\big|_{t=1-x^2} = -\sqrt{1-x^2}+c\,.$$

(ii
$$\left(g^{-1}(x) := \sqrt{x-1} = t \Rightarrow g(t) = 1+t^2\right)$$

$$\Rightarrow\int\frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx = 2\int\frac{1+t^2}{\sqrt{t^2}}\,t\cdot dt\big|_{t=\sqrt{x-1}} = 2\int(1+t^2)\,dt\big|_{t=\sqrt{x-1}}$$

$$=2t+\frac{2}{3}t^3+c\big|_{t=\sqrt{x-1}}\ ;\ c\in\mathbb{R}\,.$$

15. مثال

د تفاضلي حساب د وسطي قیمت دوهمه دعوی ،د لاندیني انتیګرال د موندلو له پاره تطبیق کوو.

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3-x-x^2}e^x dx = \sqrt{3-\xi-\xi^2}\int_{-1}^{1}e^x dx$$
$$=\sqrt{3-\xi-\xi^2}\left(e-\frac{1}{e}\right); -1<\xi<1$$

$$\Rightarrow 2.3\qquad =>2.35\cong\left(e-\tfrac{1}{e}\right)<\int_{-1}^{1}\sqrt{3\text{-}x\text{-}x^2}\,.\,e^x d^x<\sqrt{3}\left(e\text{-}\tfrac{1}{e}\right)\cong 5.25$$

کومک
$$\Big(\inf_{[-1,1]}(f(x))\int_{-1}^{1}g(x)\,dx \le \int_{-1}^{1}f(x)\cdot g(x)dx \le \sup_{[-1,1]}(f(x))\int_{-1}^{1}g(x)dx\Big)$$

16. مثال

د وسطي قیمت دعوې په استفادې سره د $f(x)=3x^2$ ، $[a,b]=[1,2]$ له پاره $\xi \in (a,b)$ داسې و ټاکی، چې $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$ صدق وکړي.

حل

$$\int_a^b f(x)dx = \int_1^2 3x^2dx = 8.$$

$$f(\xi)(b-a)=3\xi^2(2-1) = 8 \Rightarrow \xi^2 = \frac{8}{3} \Rightarrow \xi = \pm\sqrt{\frac{8}{3}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{8}{3}}$$

17. مثال

$f(x)=2x^2$ د $F(x)$ تابع مشتق دی ،داسې چې $F(1)=1$کیږي. $F(x)$ پیدا کړی.

حل

$$F(x)=\int 2x^2dx = \frac{2x^3}{3}+c. \Rightarrow F(1) = \frac{2}{3}+c = 1 \Rightarrow c = 1-\frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2x^3}{3}+\frac{1}{3}.$$

18. مثال

د منحنیو هغه فامیل پیدا کړی، چې د هغې میل د منحني په هره نقطه کې د هغې نقطې د فاصلې د منفي دوه چنده سره مساوي وي . او بیا د منحنیو د فامیل هغه منحني پیدا کړی چې د (1,1) نقطې څخه تیریږي.

حل راکړل شوي دي چې :

$$\frac{dy}{dx} = -2x \Rightarrow dy = -2xdx \Rightarrow \int dy = -\int 2xdx \Rightarrow y = -x^2+c.$$

چې دا د مطلوبو پارابولاو د منحنیو د فامیل څخه نمایندګي کوي. او دا چې د(1,1) نقطې څخه تیره شي د هغې له پاره لرو چې :

$$F(1)=1 \Rightarrow y = -x^2+c \Rightarrow 1 = -1+c \Rightarrow c = 2.$$

$$\Rightarrow F(x) = -x^2+2.$$

دا د هغې پارابول منحني ده چې د (1,1) نقطې څخه تیریږي.

19.7 دعوی

که چېرې $x=g(t)$ د I په انټرول کې د اشتقاق وړ، $g'(t)$ په I کې متمادي، $g'(t) \neq 0$ او $f(x)$ په $g(I)$ کې تعریف او متمادي وي نو

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

ثبوت

فرضوو چې $F(x)$ د $f(x)$ یوه اولیه تابع ده . همدارنګه پورته ولیدل شول چې $F(g(t))$ د $f(g(t))\cdot g'(t)$ یوه اولیه تابع ده. لرو چې

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

همدارنګه لرو چې :

$$\int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(g^{-1}(b))) - F\left(g\left(g^{-1}(a)\right)\right)$$
$$=F(b)-F(a)\ .\blacksquare$$

19. مثال

د $\int_0^1 e^{kx}dx$ د محاسبې له پاره $t = kx = g^{-1}(x) \Rightarrow x = g(t) = \frac{1}{k}t$ او $dx=\frac{1}{k}dt$ وضع کوو:

$$\int_0^1 e^{kx}\,dx = \int_0^k e^t\,\frac{dt}{k}$$
$$=\frac{1}{k}\left(e^k - e^0\right) = \frac{1}{k}\left(e^k - 1\right).$$

20. مثال

د $f(x)$ هرې تابع له پاره د $a>0$ د f چې $[0, a]$ په انټرول کې له پاره متمادي وي ، لرو چې :

$$\int_0^a f(x)\,dx = -\int_a^0 f(a-t)\,dt\ .$$

یعنې $x=a-t$ وضع کوو او $0 \le t \le a$ کیږي.

a) د قسمي انټیګرال نیونې طریقه

20.7 دعوی

که چېرې د f او g توابع په I کې د اشتقاق وړ او مشتقات ئې متمادي وي په دې صورت کې

$$\int f(x) \cdot g'(x)dx = f(x) \cdot g(x) - \int f'(x) \cdot g(x)dx.$$

ثبوت

څرنګه چې د f ، f' ، g ، او g' توابع متمادي دي نو $f\cdot g'$ او $f'\cdot g$ توابع د اولیه توابعو لرونکي دي.او د دعوې ثبوت د $(f\cdot g)' = f'\cdot g + f\cdot g'$ رابطې څخه په لاس راځي. ■

نوټ پورتنی دعوی د قسمي انتیګرال طریقه راښیي.

21. مثال

$$\int \underset{\substack{\downarrow \\ f}}{x} \cdot \underset{\substack{\downarrow \\ g`}}{e^x} dx = x\cdot e^x - \int 1\cdot e^x dx = x\cdot e^x - e^x + c.$$

$$=(x-1)\cdot e^x + c\,.$$

22. مثال

$$\int \ln x\, dx = \int 1\cdot \ln x\, dx = x\cdot \ln x - \int x\cdot x dx$$

$$x\cdot \ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + c = (\ln x - 1)x + c$$

یادونه

د دې امکان شته چې په یو سوال کې د قسمي انتیګرال طریقه په پرله پسې توګه ادامه پیدا کړي.

$$\int \underset{f'}{x^3}\cdot \underset{g}{ln^2(x)}dx = \frac{x^4}{4}\cdot ln^2(x) - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{2}{x} ln x dx$$

$$= \frac{x^4}{4} ln^2(x) - \frac{1}{2}\int x^3\cdot lnxdx = \frac{x^4}{4} ln^2(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4}\cdot lnx - \int \frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx\right]$$

$$= \frac{x^4}{4}\; ln^2(x) - \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} lnx - \frac{1}{4}\int x^3 dx\right]$$

$$= \frac{x^4}{4} ln^2(x) - \frac{1}{8}x^4 lnx + \frac{1}{8}\cdot\frac{x^4}{4} + c\;\;.$$

$$= \frac{x^4}{4} ln^2(x) - x^4\cdot\frac{1}{8} lnx + \frac{1}{32}x^4 + c$$

$$= \frac{x^4}{4}\left(ln^2(x) - \frac{1}{2} lnx + \frac{1}{8}\right) + c\;.$$

د قسمي انتیګرال طریقه په معین انتیګرال کې

21.7 دعوی

که چېرې د f او g د اشتقاق وړ توابع په $[a,b]$ کې متمادي ، f' او g' هم متمادي وي ، نو :

$$\int_a^b f(x)\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx.$$

ثبوت

$f(x)\cdot g(x)$ یوه اولیه تابع د $f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$ ده او

$$\int_a^b\big(f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)\big)dx = f(x)\cdot g(x)|_a^b.$$

بنا پردې

$$\int_a^b f(x\ )\cdot g'(x)dx = f(x)\cdot g(x)\ |_a^b - \int_a^b f'(x)\cdot g(x)dx. \blacksquare$$

نوټ

د قسمي انتیګرال طریقه هغه وخت مناسب ده چې دوې تابع د ضرب په شکل د انتیګرال لاندې راغلي وي، داسې چې په هغې کې f' د یوې ساده اولیه تابع او g د یوه ساده مشتق لرونکې وي.

24. مثال

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ .

$$\int_1^e lnxdx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx = [x\ln x]_1^e - [x]_1^e \qquad (i$$

$$= e\cdot lne - 1\cdot ln1 - (e-1)$$

$$= e\ lne\text{-}e\text{+}1\text{=}1$$

$$\int_1^2 x\cdot lnxdx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x\right]_1^2 - \int_1^2\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx \qquad (ii$$

$$= \frac{x^2}{2}\cdot lnx - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \left[\frac{x^2}{2}\cdot\ln x - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= 2ln2 - 1 - \left(\frac{1}{2}ln1 - \frac{1}{4}\right) = 2ln2 - 1 + \frac{1}{4} = 2ln2 - \frac{3}{4}$$

$$I_n := \int_1^e (lnx)^n dx = \left[x(\ln x)^n\right]_1^e - \int_1^e x\cdot n(lnx)^{n-1}\cdot\frac{1}{x}dx \qquad (iii$$

$$= \text{c-n}\int_1^e (lnx)^{n-1}dx = e - nI_{n-1} \quad .$$

b) د بینوم ډیفرنسیال انتیګرال

د بینوم د ډیفرنسیال د عنوان څخه مطلب د $x^m(a+bx^n)^p dx$ افاده ده ، په هغه صورت کې چې b,aحقیقي عددونه ، n,m او p(مثبت یا منفي) نسبتي عددونه وي.

22.7 دعوی (چی بی شیف دعوی)

د $\int x^m(a+bx^n)^p dx$ انتیګرال یوازې د لاندینیو دریو حالتونو په لرلو سره په ساده شکل بدلولی شو.

i) که چېرې p یو مثبت تام عدد وي، په دې صورت کې د $(a+bx^n)^p$ افاده د بینوم فرمول د انکشاف په واسطه د cx^k په شکل بدلیږي او په ساده ډول باندې د هغې انتیګرال اخیستلی شو.

ii) که چېرې $\frac{m+1}{n}\in\mathbb{Z}$ وي ، نو $t=\sqrt[r]{a+bx^n}$ وضع کوو (r د p مخرج دی) او انتیګرال د یوې ساده نسبتي تابع په انتیګرال باندې بدلیږي.

iii) که $\frac{m+1}{n}+p\in\mathbb{Z}$ وي ، نو د $t=\sqrt[r]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ په وضع کولو سره انتیګرال، د نسبتي تابع د انتیګرال په شکل بدلیږي. (پرته له ثبوت څخه)

25. مثال

i) $$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int x^{-\frac{1}{2}}(1+x^{\frac{1}{4}})^{\frac{1}{3}}dx.$$

دلته

$$(m=-\frac{1}{2};n=\frac{1}{4};p=\frac{1}{3};r=3;\frac{m+1}{n}=2)$$

دی ، نو $t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}$ وضع کوو . لیکو چې :

$$t=\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}=\sqrt[3]{1+x^{\frac{1}{4}}}\Rightarrow 1+x^{\frac{1}{4}}=t^3\Rightarrow x^{\frac{1}{4}}=t^3-1$$
$$\Rightarrow x=(t^3-1)^4$$

$$dx=4(t^3-1)^3\cdot 3t^2dt=12t^2(t^3-1)^3dt\,.$$

$$\int\frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{t}{(t^3-1)^2}\cdot 12t^2(t^3-1)^3dt$$

$$\int\frac{12t^7}{(t^3-1)^2}\cdot(t^3-1)^3dt=\int 12t^3(t^3-1)dt+c$$

$$=12\cdot\frac{t^7}{7}-3t^4+c=12t^4\left(\frac{t^3}{7}-\frac{1}{4}\right)+c$$

$$=\frac{12}{7}(\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}})^4\left(\frac{1+\sqrt[4]{x}}{7}-\frac{1}{4}\right)+c\,.$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt[4]{1+x^3}}dx = \int x^3(1+x^3)^{-\frac{1}{4}}dx \qquad (ii$$

$$\Rightarrow (m=3; n=3; p=-\frac{1}{4}\ ; r=4\ )$$

$$\Rightarrow \frac{m+1}{n}+p=\frac{3+1}{3}+\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{16-3}{12}=\frac{13}{12}\in \mathbb{Q}\notin \mathbb{Z}$$

دلته پورتنی انتیګرال د پو رتنیو درې حالتونو لاندې نه راځي او په اخېر کې به د هغې د **حل طریقه** درته بیان شي.

$$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = \int x^0(1+x^4)^{-1/4}dx \qquad (iii$$

$$\Rightarrow (m=0; n=4; p=-\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{m+1}{n}+p=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}=0\in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow t=\frac{(1+x^4)^{-1/4}}{x} \Rightarrow x=(t^4-1)^{-1/4}$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{\sqrt[4]{1+x^4}} = -\int \frac{t^2}{t^4-1}dt\ .$$

چې په راتلونکي کې به د مطالعې لاندې ونیول شي.

c) په قسمي کسرونود تجزیې د استعمال په واسطه د انتیګرال موندلو طریقه

په دې ځای کې هغه انتیګرالونه په نظر کې نیسو چې د انتیګرال لاندې تابع د ناطقې تابع شکل لري. یعنې $\int \frac{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}dx = \int \frac{p(x)}{q(x)}dx$.کولی شو چې دا ډول انتیګرالونه په په هغو انترولونو کې چې هلته $q(x)\neq 0$ وي په ساده شکل باندې واړوو او ددې مطلب له پاره که $\deg p(x)\geq \deg q(x)$ وي ،په دې صورت کې $p(x)$ په $q(x)$ باندې ویشو او داسې ئې لیکو :

$$\frac{p(x)}{q(x)} = p^*(x)+\frac{R(x)}{q(x)}$$

دلته $R(x)$ او $p^*(x)$ داسې پولینومونه دي چې $\deg R(x)\leq \mathrm{dc}\ q(x)$ له پاره صدق کوي او د $p^*(x)$ انتیګرال د ساده شکل لرونکی دی.

26. مثال

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{2x^2+5x+3}{2x+1}=x+2+\frac{1}{2x+1}.$$

که چېرې یو انتیګرال د $\int \frac{p(x)}{q(x)}dx$ په شکل داسې راکړل شوی وي ،چې په هغه کې

$$\deg p(x)\leq \deg q(x)$$

وي په دې حالت کې لازمه ده چې د $\frac{p(x)}{q(x)}$ افاده په قسمي کسرونو باندې تجزیه کړو.ددې له پاره د کسر مخرج یعنې $q(x)$ د امکان په صورت کې د خطي او دوهمه درجه فکتورونو د ضرب په شکل لیکو او

وروسته له هغې د $\frac{p(x)}{q(x)}$ افاده د $\frac{1}{(x-x_0)^\alpha}$ او $\frac{Ax+B}{(x^2+bx+c)^\beta}$ "$b^2-4ac<0$" د خطي ترکیب په واسطه ارائه کوو او انتیګرال ئې نسبتا اصلي شکل ته ، ساده شکل غوره کوي.

23.7 دعوی

که چېرې د $p(x)=\sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ او $q(x)=\sum_{i=0}^{m} b_\ell x^\ell$, ($b_m \neq 0$ او m>n) پولینومونه وي، په دې صورت کې :

i) د q(x) پولینوم په لاندې شکل لیکو :

$$q(x)=b_m(x-x_1)^{\alpha_1}\dots(x-x_k)^{\alpha_k}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\dots(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_\ell}.$$

په هغه صورت کې چې $x_k,\dots,x_2,x_1$ د q(x) پولینوم صفري نقطې د $\alpha_k,\dots,\alpha_2,\alpha_1$ مرتبو څخه وي.همدارنګه د $(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1},\dots(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_\ell}$, دوهمه درجه افادې د $\beta_\ell,\dots,\beta_2,\beta_1$ مرتبو لرونکي دي چې په $\mathbb{R}$ کې صفري نقطې نه لري ، یعنې $(b^2-4ac<0)$.او برسېره پردې

$$\alpha_1+\alpha_2+\dots+\alpha_k+2\beta_1+2\beta_2+\dots+2\beta_\ell=m.$$

کیږي.

ii) د $\frac{p(x)}{q(x)}$ شکل د قسمي کسرونو د تجزیې په مرسته په لاندې ډول لیکلای شو :

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{a_{11}}{x-x_1}+\frac{a_{12}}{(x-x_1)^2}+\dots+\frac{a_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}}+\dots+\frac{a_{k1}}{x-x_k}+\frac{a_{k2}}{(x-x_k)^2}+\dots+\frac{a_{k\alpha_k}}{(x-x_k)^{\alpha_k}}+$$
$$+\frac{A_{11}x+B_{11}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_{12}x+B_{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+\dots+\frac{A_{1\beta_1}x+B_{1\beta_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}+\dots+\frac{A_{\ell 1}x+B_{\ell 1}}{x^2+b_1x+c_1}+\frac{A_{\ell 2}x+B_{\ell 2}}{(x^2+b_1x+c_1)^2}+$$
$$\dots+\frac{A_{\ell\beta_1}x+B_{\ell 2}}{(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}}$$

په هغه صورت کې چې $a_{i_{\alpha_i}}$ او $B_{i\beta_i}$ حقیقي ثابت عددونه دي.[21]

(پرته له ثبوت څخه) ■

کله مو چې د q(x) فکتورونه و پېژندل د $\frac{p(x)}{q(x)}$ پولینوم په پورته شکل لیکو او د هغې ثابت عددونه تعین کوو.

27. مثال

i)

$$\int\frac{p(x)}{q(x)}dx=\int\frac{x+4}{x^2-3x+2}dx.$$

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{x+4}{x^2-3x+2}=\frac{x+4}{(x-1)(x-2)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}$$

$$\Rightarrow x+4=a_1(x-2)+a_2(x-1)$$

$$\Rightarrow x+4=(a_1+a_2)x-2a_1-a_2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{matrix} a_1+a_2=1 \\ -2a_1-a_2=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow a_1=-5\,;a_2=6\,.$$

$$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)}=-\frac{5}{x-1}+\frac{6}{x-2}$$

$$\int \frac{x+4}{x^2-3x+2}dx.=-5\int \frac{1}{x-1}dx+6\int \frac{1}{x-2}dx$$

$$=-5\ln|x-1|+6ln|x-2|+c=ln\frac{|x-2|^6}{|x-1|^5}+c\,.$$

د a_1 او a_2 ثوابت په لاندې ډول هم پيدا کولی شو :

$$x+4=a_1(x-2)+a_2(x-1)$$

$$x=1\Rightarrow -a_1=5\Rightarrow a_1=-5$$

$$x=2\Rightarrow a_2=6\ .$$

(ii

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int \frac{x+1}{x^3-7x^2+16x-12}dx\,.$$

د q(x) يو له صفري قيمتونو څخه $x_1=2$ دی، نو ليکو چې :

$$x^3-7x^2+16x-12=(x-2)(x^2-5x+6)=(x-2)(x-2)(x-3)$$

دلته $x_1=2$ د دوهمې او $x_2=3$ د اولې مرتبې صفري قيمتونه دي.

$$\frac{p(x)}{q(x)}=\frac{x+1}{x^3-7x^2+16x-12}=\frac{a_1}{x-2}+\frac{a_2}{(x-2)^2}+\frac{a_3}{x-3}$$

$$\Rightarrow x+1=a_1(x-2)(x-3)+a_2(x-3)+a_3(x-2)^2$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} x=2\Rightarrow 3=a_2\Rightarrow a_2=3 \\ x=3\Rightarrow 4=a_3\Rightarrow a_3=4 \\ x=0\Rightarrow 6a_1-3\cdot a_2+4\cdot a_3=1 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow 6a_1-3\cdot 3+4\cdot 4=1\Rightarrow a_1=-1$$

$$\Rightarrow \int \frac{x+1}{x^3-7x^2+16x-12}dx=-\int \frac{dx}{x-2}+3\int \frac{dx}{(x-2)^2}+4\int \frac{dx}{x-3}$$

$$=-\ln|x-2|-\frac{3}{x-2}+4\ln|x-3|+c\,.$$

(iii

$$I=\int \frac{p(x)}{q(x)}dx=\int \frac{3x^4+5x^3+10x^2+5x+1}{x^5+2x^4+3x^3+2x^2+x}dx$$

$$q(x)=x^5+2x^4+3x^3+2x^2+x=x(x^4+2x^3+3x^2+2x+1)$$

$= x(x^2 + x + 1)^2)$

$\Rightarrow \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_1}{x} + \frac{b_1x+c_1}{x^2+x+1} + \frac{c_2x+d_1}{(x^2+x+1)^2}$

$\Rightarrow 3x^4 + 5x^3 + 10x^2 + 5x + 1$

$= a_1(x^2 + x + 1)^2 + (b_1x + c_1)[x(x^2 + x + 1)^2] + (c_2x + d_1)x]$

وروسته د یولړ عملیو څخه په لاس راځي چې :

$\Rightarrow a_1 = 1; b_1 = 2 ; c_1 = 1 ; c_2 = 4 ; d_1 = 2$

$I = \int \frac{dx}{x} + \int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx + 2\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$= \ln|x| + \ln|x^2 + x + 1| + 2\int \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$

$= ln(|x||x^2 + x + 1|) - \frac{2}{x^2+x+1} + c$.

d) ځنې توابع چې ددوهمې درجې افادو لرونکي وي

د ځینو کسري توابعو انتیګرال د محاسبې له پاره، که د تابع په مخرج کې $ax^2 + bx + c$ او یا د دې جذري شکل موجود وي نو د هغې مخرج ته په لاندې ډول تغیر ورکوو:

$$ax^2 + bx + c = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = a[(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}]$$

$$= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$$

او د $\frac{4ac-b^2}{4a}$ افادې د اشارې په نظر کې نیولو سره لاندینی تعویض په نظر کې نیسو:

$$ax^2 + bx + c = a(t^2 \pm k^2) ; t := (x + \frac{b}{2a})$$

د مثال په توګه لاندې انتیګرال حساب کوو :

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+10} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+6} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+(\sqrt{6})^2} ; t := x + 2$$

$$\int \frac{dt}{t^2+(\sqrt{6})^2} = \frac{1}{\sqrt{6}} arc\ tan \frac{t}{\sqrt{6}} + c$$

$$= \frac{1}{\sqrt{6}} tan \frac{x+2}{\sqrt{6}} + c$$

28. مثال

لاندې انتیګرالونه حساب کړی .

(i

$$\int \frac{x+3}{x^2-2x-5}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x-2)+4}{x^2-2x-5}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x-2}{x^2-2x-5}dx + 4\int \frac{1}{x^2-2x-5}dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{1}{(x-1)^2-2^2}dx \ ;(t := x-1)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4\int \frac{dt}{t^2-2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + 4(\frac{1}{2\cdot 2}\left(\ln\left|\frac{t+2}{t-2}\right|\right) + c)$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \ln\left|\frac{x-1+2}{x-1-2}\right| + c$$

$$= \frac{1}{2}\ln|x^2-2x-5| + \ln\left|\frac{x+1}{x-3}\right| + c$$

(ii

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{6})^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+(\sqrt{6})^2}} = ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right| + c$$

$$= ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + c$$

(iii

$$\int \frac{(2x+6)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{(2x+4+2)dx}{\sqrt{x^2+4x+10}} = \int \frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+10} + \int \frac{2dx}{x^2+4x+10}$$

$(u := x^2+4x+10 \ ; \ du = (2x+4)dx)$

$$= \int \frac{du}{\sqrt{u}} + 2\int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+(\sqrt{6})^2}}$$

$$= 2\sqrt{u} + 2ln\left|t+\sqrt{t^2+6}\right| + c \ .$$

$(t := x+2 \ ; \ dt = dx)$

$$= 2\sqrt{x^2+4x+10} + 2ln\left|x+2+\sqrt{(x+2)^2+6}\right| + c \ .$$

(iv

$$\int \frac{x+3}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)+1}{\sqrt{x^2+4x+8}}dx = \int \frac{\frac{1}{2}(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} + \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

$(u:=x^2+4x+8\ ; t=x+2\ ; dt=dx\ ; du=(2x+4)dx\ )$

$$=\frac{1}{2}\ ln|x^2+4x+8|+\ \ln\left(x+2+\sqrt{(x+2)^2+2^2}\right.+c\ .$$

$$\int\frac{x^2}{(1-x)^{100}}dx\ =\int\frac{(1-x-1)^2}{(1-x)^{100}}dx=\int\left|\frac{1-x-1}{(1-x)^{50}}\right|^2\ dx$$

$$=\int\left[\frac{1-x}{(1-x)^{50}}-\frac{1}{(1-x)^{50}}\right]^2dx=\int\left[\frac{1}{(1-x)^{49}}-\frac{1}{(1-x)^{50}}\right]^2dx$$

$$=\int\frac{1}{(1-x)^{98}}dx-2\int\frac{1}{(1-x)^{99}}dx+\int\frac{1}{(1-x)^{1009}}dx+c$$

$$=\frac{1}{97(1-x)^{97}}-\frac{2}{98(1-x)^{98}}+\frac{1}{99(1-x)^{99}}+\ c\ .$$

v) $\int\frac{3x+7}{x^2+1+1}dx=?$

حل (کورنی دنده)

نوټ

که چېرې $R(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ تابع ولرو داسې چې په هغه کې $P(x)$ او $q(x)$ اختیاري توابع وي .د مثال په توګه که $R(x)=\frac{x+\sqrt[3]{(x-1)^2}}{\sqrt{x}-\sqrt{x^2+1}}$ وي په دې صورت کې د $R(x)$ تابع د x دمتحول، $\sqrt{x}$ ، $\sqrt{x^2+1}$ او $\sqrt[3]{(x-1)^2}$ جذرونو یوه نسبتي تابع ده او هغه معمولاً داسې لیکل کیږي :

$$f(x)=R(x;\sqrt{x}\ ;\sqrt{x^2+1};\ \sqrt[3]{(x-1)^2})\quad .$$

د مثال په توګه که $f(x)=\frac{sin^2(x)-cos^2(x)}{tan^3(x)}$ ولرو ، داسې يې لیکو :

$$f(x)=R(\sin x\ ;\cos x\ ;\tan x)\ .$$

اوس غواړو چې د $I=\int R\left[x;(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_1},\dots,(\frac{ax+b}{cx+d})^{r_s}\right]dx$ انتیګرال حساب کړو . په دې انتیګرال کې

$a,b,c,d\in\mathbb{R}$, $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}\neq0$; $r_1,r_2,\dots,r_s\in\mathbb{Q}$ دي .که $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=0$ وي نو د a او b ضریبونه د c او d ضریبونو سره متناسب دي او د $\frac{ax+b}{cx+d}$ د تابع مفهوم د x له جنسه له منځه ځي .موږ د انتیګرال په محاسبه کې $t^m:=\frac{ax+b}{cx+d}$ وضع کوو(m د $r_1,r_2,\dots,r_s$ مشترک مخرج او $r_i=\frac{p_i}{m}$, $p_i\in\mathbb{Z}$ دی. لرو چې :

$$(cx+d)t^m=ax+b$$

$$cxt^m+dt^m=ax+b$$

$$\Rightarrow(ct^m-a)x=b-dt^m\Rightarrow x=\frac{b-dt^m}{ct^m-a}=\rho(t)\Rightarrow dx=\rho'(t)dt$$

د پورتنيو قېمتونو په وضع کولو سره په$\int R\left[x; \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r_s}\right] dx$ کې ، په لاس راځي چې :

$$I=\int R\left(\frac{dt^m-b}{a-ct^m} ;\ t^{p_1}, \dots, t^{p_s}\right)\rho'(t)dt = \int R^*(t)dt \ . \ [19]$$

29. مثال

لاندې انتيګرالونه حساب کړی :

$$\int R\left(\sqrt{x}, \sqrt[3]{x}\right)dx = \int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}+x^{\frac{1}{3}}}dx$$

دلته $r_1 = \frac{1}{2}, r_2 = \frac{1}{3}$ او m=6 د r_1او r_2 مشترک مخرج دی او x په t^6 سره وضع کوو. يعنې $dx=6t^5dt$ کيږي. ليکو چې :

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{6t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^5}{t^3+t^2}dt = 6\int \frac{t^3}{t+1}dt \ .$$

$$=6\left[\int (t^2-t+1)dt - \int \frac{dt}{1+t}\right] = 6\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+t\right] - \ ln|1+t| + c$$

$$= 2t^3 - 3t^2 + 6t - ln|1+t| + c \ .$$

ii) $I=\int \sqrt{(x-1)(x-2)}dx = \int (x-1)\cdot\sqrt{\frac{x-2}{x-1}}dx$ انتيګرال د محاسبې له پاره $t^2 := \frac{x-2}{x-1}$ وضع کوو :

$$t^2(x-1) = (x-2) \Rightarrow t^2x - t^2 = x-2 \Rightarrow (t^2-1)x = t^2-2$$

$$\Rightarrow x = \frac{t^2-2}{t^2-1} \Rightarrow \ dx = \frac{2t(t^2-1)-2t(t^2-2)}{(t^2-1)^2}\ dt \ \ ; dx = \frac{2tdt}{(t^2-1)^2}$$

که پورتني قېمتونه د I په انتيګرال کې وضع کړو د هغې څخه لاندې افاده

$$I=\int\left(\frac{t^2-2}{t^2-1}-1\right)\cdot t\cdot\frac{2t}{(t^2-1)^2}dt = \int\left(\frac{t^2-2-t^2+1}{t^2-1}\right)\cdot\frac{2t^2}{(t^2-1)^2}dt = \int\frac{-2t^2}{(t^2-1)^3}dt \ .$$

په لاس راځي چې په اسانۍ سره د قسمي کسرونو د تجزيې او د قسمي انتيګرال طريقې په مرسته حل کيږي او د مطلوب انتيګرال موندلو له پاره د t قېمت د x له جنسه وضع کوو .

c) د $\int R(x ; \sqrt{ax^2+bx+c})\, dx$ انتيګرال محاسبه

د پورتني انتيګرال د محاسبې له پاره په لاندېنيو حالاتو کې د اويلرد تعويض څخه ګټه اخلو :

$$\int R(x ; \sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx \ , \ a \neq 0$$

لومړی حالت

که(a>o) وي،نو $\sqrt{ax^2+bx+c)} = \pm\sqrt{a}x+t$ وضع کوو لیکو چې :

$$\Rightarrow ax^2+bx+c=(\pm\sqrt{a}x+t)^2=ax^2\pm 2\sqrt{a}xt+t^2$$

$$\Rightarrow bx\pm 2\sqrt{a}x=t^2-\ c$$

$$x=\frac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}}=\ R_1(t)\Rightarrow dx=\ R_1'(t)dt$$

$$\int R(x\ ;\ \sqrt{ax^2+bx+c)}\,dx=\int R(\frac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}}\ ;\ \pm\sqrt{a}\sqrt{\frac{t^2-c}{b\pm 2\sqrt{a}}+t)}R_1'(t)dt$$

30. مثال

د $\int\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx$ انتیگرال حل کوو .

دلته a>1 دی نو $\sqrt{x^2+c}:=\ \pm x+t$ وضع کوو .

$$\Rightarrow x^2+c=(-x+t)^2=x^2-2xt+t^2$$

$$\Rightarrow 2xt\ =t^2-c\Rightarrow x=\frac{t^2-c}{2t}\Rightarrow dx=\frac{2t^2+2c}{4t^2}dt$$

$$\Rightarrow\sqrt{x^2+c}=-x+t=\ -\frac{t^2-c}{2t}+t=\frac{-t^2+c+2t^2}{2t}=\frac{t^2+c}{2t}\ .$$

$$\Rightarrow\int\frac{1}{\sqrt{x^2+c}}dx=\int\frac{\frac{t^2+c}{2t^2}}{\frac{t^2+c}{2t}}dt=\int\frac{t^2+c}{2t^2}\cdot\frac{2t}{t^2+c}dt=\int\frac{1}{t}dt\ .$$

$$=\ln|t|+c=ln\left|x+\sqrt{x^2+c}\right|+c_1$$

دوهم حالت

که $\propto,\beta$ د ax^2+bx+c افادې حقیقي جذرونه وي په دې صورت کې لاندې افاده وضع کوو :

$$\sqrt{ax^2+bx+c)}\coloneqq(x-\propto)t\ .$$

څرنګه چې $(x-\beta)$a(x-∝)= ax^2+bx+c کیږي ، نو

$$\sqrt{ax^2+bx+c)}=\sqrt{a(x-\propto)(x-\beta)}$$

$$=(x-\propto)t\Rightarrow\ a(x-\propto)(x-\beta)=(x-\propto)^2t^2$$

$$\Rightarrow \mathrm{a}x - \mathrm{a}\beta = xt^2 - \propto t^2 \Rightarrow (\mathrm{a} - t^2)x = \mathrm{a}\beta - \propto t^2 \Rightarrow x = \frac{\propto t^2 - \mathrm{a}\beta}{t^2 - \mathrm{a}}$$

چې په نتیجه کې x د t له جنسه یوه ناطقه تابع ده .

31. مثال

د $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}} = ?$ انتیګرال حل کړی .

حل

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x+4)(x-1)}}\,dx$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+3x-4} := (x+4)t$$

$$\Rightarrow x^2+3x-4 = (x+4)^2t^2$$

$$\Rightarrow (x+4)(x-1) = (x+4)^2t^2 \Rightarrow (x-1) = (x+4)t^2 = xt^2 + 4t^2$$

$$x - xt^2 = 4t^2 + 1 \Rightarrow x(1-t^2) = 4t^2+1$$

$$\Rightarrow x = \frac{4t^2+1}{1-t^2} \Rightarrow dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2}\,dt\ .$$

$$\sqrt{x^2+3x-4} = (x+4)t = \left(\frac{4t^2+1}{1-t^2}+4\right)\cdot t = \frac{5t}{1-t^2}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2+3x-4}}\,dx = \int \frac{\frac{10t}{(1-t^2)^2}}{\frac{5t}{1-t^2}}\,dt = \int \frac{2}{1-t^2}\,dt\ .$$

$$= \ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + c = \ln\left|\frac{1+\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}{1-\sqrt{\frac{x-1}{x+4}}}\right| + c = \ln\left|\frac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x-1}}\right| + c$$

دریم حالت

که $c>0$ وي نو $\sqrt{\mathrm{a}x^2+bx+c)} = xt \pm \sqrt{c}$ وضع کوو . لیکو چې :

$$\mathrm{a}x^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} \pm c \Rightarrow (\mathrm{a}-t^2)x^2 + \left(b - 2\sqrt{c}t\right)x = 0$$

$$x[(\mathrm{a}-t^2)x + \left(b-2\sqrt{c}t\right)] = 0$$

$$(\mathrm{a}-t^2)x = -\left(b-2\sqrt{c}t\right) = \frac{2\sqrt{c}t-b}{a-t^2}$$

$$\Rightarrow\ x = \frac{2\sqrt{c}t-b}{\mathrm{a}-t^2}\ \ .$$

وروسته له دې د dx او dt له جنسه پیدا کوو، او د مطلوب قیمتونو د وضع کولو وروسته انتیګرال په ساده شکل بدلیږي [25] .

32. مثال

لاندې انتیګرالونه حل کړی .

$$I=\int \frac{1}{x+\sqrt{x^2+x+1}}dx \qquad (i$$

$$I=\int \sqrt{x}\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}}\right)dx \qquad (ii$$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx=\int x^0(1+x^3)^{\frac{-1}{3}}dx \qquad (iii$$

حل

دلته a>0 دی نو $\sqrt{x^2+x+1}=-x+t$ وضع کوو .

$$x^2+x+1=x^2-2xt+t^2 \qquad (i$$

$$x+1=t^2-2xt \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{1+2t}\ ;\ dx=2\cdot\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}dt\ .$$

$$I=2\int\frac{\frac{t^2+t+1}{(1+2t)^2}}{\frac{t^2-1}{1+2t}+t-\frac{t^2-1}{1+2t}t}dt=2\int\frac{t^2+t+1}{t(1+2t)^2}dt$$

$$\Rightarrow 2\int\left[\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{3}{(1+2t)^2}\right]dt\ .\ (A=2, B=-3, C=-3)$$

$$I=2\int\left[\frac{A}{t}+\frac{B}{1+2t}+\frac{3}{(1+2t)^2}\right]dt+c=2\left[2ln|t|-\frac{3}{2}ln|1+2t|+\frac{3}{2(1+2t)}\right]+c\ .$$

دلته که د t قیمت د x له جنسه وضع کړو د مطلوب اتیګرال حل په لاس راځي .

$$\Rightarrow\sqrt{1-2x-x^2}=\left(x+1+\sqrt{2}\right)t=\frac{2\sqrt{2}}{(1+t^2)}t$$

$$I=-4\sqrt{2}\int\frac{t}{(1+t^2)(t^2+2\sqrt{2}t+1)}dt$$

وروسته له دې د قسمي کسرونو د تجزیې له مخې په اسانی سره پورتنی انتیګرال محاسبه کیدلی شي .

$$I=\int\sqrt{x}\left(\sqrt[4]{1-\frac{1}{\sqrt[2]{x^3}}}\right)dx=\int x^{\frac{1}{2}}(1-x^{\frac{-3}{2}})^{\frac{1}{4}}dx \qquad (ii$$

دلته $\frac{m+1}{n} = \frac{\frac{1}{2}+1}{\frac{-3}{2}} = -1 \in \mathbb{Z}$, $m = \frac{1}{2}$, $n = \frac{-3}{2}$, $p=\frac{1}{4}$ او 4 د p نسبتي عدد مخرج دی . یعني r=4 دی او $a+bx^n = 1 - x^{\frac{-3}{2}} = t^4$ وضع کوو .

$$x^{\frac{-3}{2}} = 1 - t^4 \Rightarrow x = (1 - t^4)^{\frac{-2}{3}}$$

$$t^4 = 1 - x^{\frac{-3}{2}} \Rightarrow t = (1 - x^{\frac{-3}{2}})^{\frac{1}{4}}$$

$$dx=\frac{-2}{3}(1 - t^4)^{\frac{-2}{3}-1} \cdot (-4t^3)dt \ .$$

$$I=\int x^{\frac{1}{2}}(1 - x^{\frac{-3}{2}})^{\frac{1}{4}}dx = \int((1 - t^4)^{\frac{-2}{3}})^{\frac{1}{2}} \cdot t \cdot \frac{8}{3}((1 - t^4)^{\frac{-5}{3}} \cdot t^3)dt$$

$$\int((1 - t^4)^{\frac{-1}{3}}\frac{8}{3}((1 - t^4)^{\frac{-5}{3}} \cdot t^4\, dt \ .$$

$$=\int\frac{8}{3}((1 - t^4)^{-2}t^4 dt = \frac{8}{3}\int\frac{t^4}{(1-t^4)^2}dt \ .$$

$$=\frac{8}{3}\int(\underset{\substack{\downarrow\\ u}}{t} \cdot \underset{\substack{\downarrow\\ v'}}{\frac{t^3}{(1-t^4)^2}})dt = \frac{2}{3}\int t \cdot \frac{4t^3}{(1-t^4)^2}dt$$

$$=\frac{2}{3}\left[\frac{t}{1-t^4} - \int\frac{1}{1-t^4}dt\right] = \frac{2t}{3(1-t^4)} - \frac{1}{3}\int(\frac{1}{1-t^2} + \frac{1}{1+t^2})\,dt \ .$$

$$=\frac{2t}{3(1-t^4)} - \frac{1}{6}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| - \arctan t + c \ .$$

که دلته د x له جنسه وضع شي، د پورتني انتیگرال حل په لاس راځي .

$$I=\int\frac{1}{\sqrt[3]{1+x^3}}dx = \int x^0(1 + x^3)^{\frac{-1}{3}}dx \qquad \text{(iii}$$

$$(m=0 \ ; n=3 \ ; p= -\frac{1}{3} \ ; \frac{m+1}{n} + p = \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) = 0 \ \in \mathbb{Z})$$

دلته $\frac{a+bx^n}{x^n} = \frac{1+x^3}{x^3} = t^3$ وضع کوو ، لیکو چې :

$$(1+x^3) \cdot x^{-3} = t^3 \Rightarrow 1 + x^{-3} = t^3 \Rightarrow x^{-3} = t^3 - 1$$

$$\Rightarrow -3x^{-4}dx = 3t^2dt \Rightarrow x^{-4}dx = -t^2dt \ .$$

$$\Rightarrow \int\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}} = \int\frac{dx}{\sqrt[3]{x^3(\frac{1}{x^3}+1)}} = \int\frac{dx}{x\cdot\sqrt[3]{1+x^{-3}}}$$

$$= \int\frac{x^3}{x^4\sqrt[3]{1+x^{-3}}}dx = \int\frac{x^{-4}\cdot x^3}{\sqrt[3]{1+x^{-3}}}dx$$

$$=\int \frac{-t^2}{t\cdot(t^3-1)}dt = -\int \frac{t^2}{t\cdot(t^3-1)}dt = -\int \frac{t}{t^3-1}dt$$

وروسته له دې د قسمي کسرونو د تجزيې په مرسته کولی شو، چې پورتنی انتيګرال په اسانی سره پيدا کړو.

f) د ځينو خاصو توابعو د انتيګرال محاسبه

په دې برخه کې $\int R(sinx, cosx)dx$ ډوله انتيګرالونه په نظر کې نيسو، داسې چې د انتيګرال لاندې تابع د هغې کسرونو څخه تشکيل شويده چې صورت او مخرج ئې د sinx او cosx لرونکي وي .په دې حالت کې $t=\tan\frac{x}{2}$ وضع کوو . لرو چې:

$$\sin x=2\sin(\frac{x}{2})\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin(\frac{x}{2})\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{sin^2(\frac{x}{2})+cos^2(\frac{x}{2})} = \frac{2\tan(\frac{x}{2})}{1+tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sin^2(\frac{x}{2})}{1} = \frac{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)-sin^2(\frac{x}{2})}{cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+sin^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-tan^2(\frac{x}{2})}{1+tan^2(\frac{x}{2})} = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

همدارنګه لرو چې:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t \Rightarrow \frac{x}{2} = arc\tan t \Rightarrow x = 2\, arc\tan t \Rightarrow dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

بنا پردې مطلوب تعويض عبارت دی له:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = t\,; \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\,; \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\,; dx = \frac{2dt}{1+t^2}\,.$$ [8]

نوټ

پورتنی تعويض په عمومي توګه سره د تطبيق وړتيا لري. ولې کله کله په خاصو شرايطو کې کولی شو چې د ساده ډوله تعويضونو څخه کار واخلو . د مطلب د ښه روښانتيا په اړه لاندې مثالونه په نظر کې نيسو:

33. مثال

i) $$\int \frac{sin^3(x)}{2+cos\,x}dx = \int \frac{sinx\cdot sin^2(x)}{2+cos\,x}dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{2+cos\,x}\cdot sin\,x\,dx$$

$(t:=\cos x \Rightarrow dt = -sinx\,dx \Rightarrow -dt = sin\,x\,dx)$

$$\Rightarrow \int \frac{sin^3(x)}{2+cos\,x}dx = \int \frac{1-cos^2(x)}{2+\cos x}\cdot \sin x\,dx = \int \frac{1-t^2}{2+t}(-dt)$$

$$\int \frac{t^2-1}{2+t^2}dt = \int((t-2)+\frac{3}{t+2})\,dt = \frac{1}{2}t^2-2t+3ln|2+t|+c$$

$$=\frac{1}{2}cos^2(x)-2cosx+3\,ln|\cos x+2|+c$$

$$\int\frac{cos^3(x)}{sin^4(x)}dx=\int\frac{cos^2(x)\cdot\cos x}{sin^4(x)}dx=\int\frac{(1-sin^2x)cosx}{sin^4(x)}dx \qquad (ii$$

(sin x=t ; cosxdx = dt)

$$\int\frac{cos^3(x)}{sin^4(x)}dx=\int\frac{1-t^2}{t^4}dt=\int\frac{1}{t^4}dt-\int\frac{1}{t^2}dt=\int t^{-4}\,dt-\int\frac{1}{t^2}dt$$

$$=\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{1}{t}+c=-\frac{1}{3t^2}+\frac{1}{t}+c$$

$$=\frac{-1}{3sin^3x}+\frac{1}{sinx}+c$$

34. مثال (د کورنی دندې په توګه)

$$\int\frac{1}{1+sinx}dx=? \qquad (i$$

$$\int\frac{1}{cos^4x}dx=? \qquad (ii$$

$$\int\frac{1}{sin^3x\cdot cosx}dx=? \qquad (iii$$

$$\int\frac{1}{2-sin^2x}dx=? \qquad (iv$$

$\int sin^m x\cdot cos^n xdx$ (g ډوله انتیګرالونه

که m او n نسبتي عددونه وي ، نو د u:=sinx یا u:= cosx تعویض په کارولو سره لیکو چې :

$$u:=\sin x\ ;\ du=\cos x\,dx\Rightarrow dx=\frac{du}{cosx}=\frac{du}{(1-sin^2x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{du}{(1-u^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\Rightarrow\int sin^m x\cdot cos^n xdx=\int u^m((1-u^2)^{\frac{1}{2}})^n\ ((1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\ du$$

$$\int u^m(1-u^2)^{\frac{n}{2}}(1-u^2)^{-\frac{1}{2}}\ du=\int u^m(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}du$$

نوټ

د $m,n\in\mathbb{Z}$ په صورت کې که m=2k+1 (طاق) وي نو u=cosx او که n= 2k+1 (طاق) وي نو u=sinx وضع کوو .

$$\int \sin^m x\cdot\cos^n xdx=\int\sin^{2k+1}x\cdot\cos^n xdx$$

$$=\int(1-\cos^2x)^k\cos^n x\cdot\sin x\,dx$$

$=\int (1-u^2)^k \cdot u^n \, du$

همدارنگه که mاو n دواړه مثبت او جفت وي یا یو له دوی څخه صفر وي په دې حالت کې د

$sin^2 x = \frac{1-cos2x}{2}$; $cos^2 x = \frac{1+cos2x}{2}$

څخه کار اخلو . د مثال په توګه

$\int cos^2 x \, \mathrm{dx} = \int \frac{1+cos2x}{2} \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\int dx + \int \frac{cos2x}{2} dx$

$(2\mathrm{x}=\mathrm{u} \Rightarrow du = 2dx \Rightarrow dx = \frac{du}{2})$

$\Rightarrow \int cos^2 x \, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{2}\mathrm{cosu \, du} = \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{4}\int \mathrm{cosdu}$

$= \frac{1}{2}\mathrm{x} + \frac{1}{4}\mathrm{sin2x} + \mathrm{c}$

h) $\int sin \propto x \cdot cos\beta x \, dx$ ډوله انتیګرالونو محاسبه

ددې ډول انتیګرالونو د محاسبې له پاره د لاندینیو فرمولونو څخه کار اخلو .

$\sin\propto x \cdot cos\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\propto +\beta)\, x + \sin(\propto -\beta)\, x]$

$\sin\propto x \cdot sin\beta x = \frac{1}{2}[\sin(\propto -\beta)\, x - \cos(\propto +\beta)\, x]$

$\cos\propto x \cdot cos\beta x = \frac{1}{2}[\cos(\propto +\beta)\, x + \cos(\propto -\beta)\, x]$

د مثال په توګه

$\int \sin 2x \cdot cosxdx = \frac{1}{2}\int (\sin 3\, x + \mathrm{sinx})\mathrm{dx} = \frac{1}{6}\mathrm{cos3x} - \frac{1}{2}\mathrm{cosx} + \mathrm{c}$.

نوټ

د $\int e^{\propto x} cos\beta x dx$, $\int e^{\propto x} sin\beta x dx$, $\int x^n cos \propto x dx$, $\int x^n arc \, sinxdx$ ډوله انتیګرال د
محاسبې له پاره د انتیګرال د قسمي طریقې څخه کار اخلو .

د مثال په توګه

$$\int \underset{u}{\underset{\downarrow}{\mathrm{x}^2}}\, \underset{v'}{\underset{\downarrow}{\mathrm{sinxdx}}} = -\mathrm{x}^2\mathrm{cosx} + \int \underset{u}{\underset{\downarrow}{2\mathrm{x}}}\, \underset{v'}{\underset{\downarrow}{\mathrm{cosxdx}}}$$

$= -\, \mathrm{x}^2\mathrm{cosx} + 2\mathrm{xsinx} - 2\int \mathrm{sinxdx} + \mathrm{c}$.

$= -\ x^2\cos x + 2x\sin x + 2\cos x + c$.

35. مثال

لاندې انتيګرالونه د انتيګرال په قسمي طريقه حل کړی(کورنی دنده)

$\int x\ln x\,dx = ?$ (i

$\int arc\,\sin x\,dx = ?$ (ii

$\int x\,arc\,\tan x\,dx = ?$ (iii

$\int R(shx\,;chx)dx$ (i ډوله انتيګرالونه

په دې صورت کې th(x/2)=u وضع کوو :

$$shx = sh\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2sh\left(\frac{x}{2}\right)ch\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2sh\left(\frac{x}{2}\right)ch\left(\frac{x}{2}\right)}{ch^2\left(\frac{x}{2}\right)-sh^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1-(\tan\left(\frac{x}{2}\right))^2} = \frac{2u}{1-u^2}$$

په همدې ډول مومو چې

$$chx = \frac{1+u^2}{1-u^2}\ ;thx\left(\frac{x}{2}\right) = u \Rightarrow \frac{x}{2} = arc\,thu \Rightarrow x = 2arc\,thu$$

$$\Rightarrow dx = \frac{2}{1-u^2}du$$

$$\int R(shx\,;chx)dx = 2\int\left(\frac{2u}{1-u^2}\,,\frac{1+u^2}{1-u^2}\right)\frac{1}{1-u^2}du$$

$\int\sqrt{x^2-a^2}dx\,;\int\sqrt{a^2\pm x^2}dx$ (j ډوله انتيګرالونه

هغه انتيګرالونه چې د $\sqrt{x^2+a^2}$، $\sqrt{a^2-x^2}$او $\sqrt{x^2-a^2}$ افادو لرونکي وي د مثلثاتي تعويض په مرسته يې په ساده شکلونو باندې اړولی شو .د دا ډول انتيګرالونو له پاره لاندې درې حالتونه په نظر کې نيسو :

(i د $\sqrt{a^2-x^2}$ له پاره x= a sinu وضع کوو .

(ii د $\sqrt{a^2+x^2}$، له پاره x = a tanu وضع کوو .

iii) د $\sqrt{x^2-a^2}$ له پاره x=a secu وضع کوو .

دا هم زیاتوو چې په هر حالت کې a> 0 دی .

د پورتنیو درې حالتونو څخه یوازې لومړی حالت مطالعه کوو او د x:= a sinu وضع کولو څخه کار اخلو

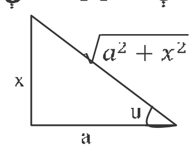
$\sqrt{a^2-x^2} = \sqrt{a^2-a^2sin^2u} = a\sqrt{1-sin^2u} = a\sqrt{cos^2u} = a|cosu|$.

څرنګه چې $u = sin^{-1}(\frac{x}{a}) \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \le u \le \pi/2$ او a sinu = x⇒ cosu > 0 دی . نو

$\sqrt{a^2-x^2} = a\ cosu$.

پورتنی تعویض د هر حالت له پاره د لاندې شکلونو له مخې په اسانی سره درک کولی شئ .

sinu=$\frac{x}{a} \Rightarrow x = a\ sinu$



همدارنګه لرو چې

x = a tan u

$\Rightarrow \sqrt{a^2+x^2} = a\sqrt{1+tan^2u} = a\sec u$

36. مثال

د $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}}$ انتیګرال حساب کړی

حل د شکل له مخې 3 tanu=2x وضع کوو . لرو چې

2dx=$3sec^2u\ du$

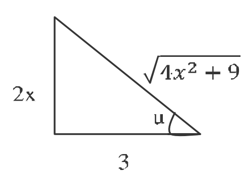
$cosu = \frac{3}{\sqrt{4x^2+9}} \Rightarrow \sqrt{4x^2+9} = \frac{3}{cosu}$

$\sqrt{4x^2+9} = 3\ secu$.

$\Rightarrow \int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2+9}} = \int \frac{\frac{3}{2}sec^2u}{\frac{3}{2}tanu \cdot 3secu}du = \frac{1}{3}\int \frac{secu}{tanu}du = \frac{1}{3}\int cscudu$

$= \frac{1}{3}ln|cscu - cotu| + c$.

$= \frac{1}{3}\ ln\left|\frac{\sqrt{4x^2+9}-3}{2x}\right| + c$



37 . مثال

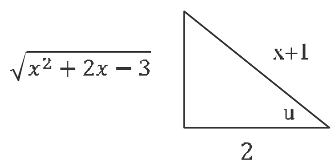
د $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$ انتیګرال حل په نظر کې نیسو .

حل

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx = \int \frac{x}{\sqrt{(x+1)^2-4}}\,dx$$

دلته د شکل له مخې $2secu = x+1$ وضع کوو . مومو چې

$$\Rightarrow dx = 2\, secu \cdot tanu\; du\ .$$



$$\sqrt{(x+1)^2-4} = 2\,\mathrm{tanu}$$

$$I = \int \frac{(2secu-1)\cdot 2secu\cdot tanu}{2tanu}\,du$$

$$= \int 2(sec^2u - secu)\,du = 2tanu - ln|secu + tanu| + c$$

$$= \sqrt{x^2+2x-3} - \ln\left|\frac{x+1+\sqrt{x^2+2x-3}}{2}\right| + c\ .$$

4. تمرین

لاندې انتیګرالونه حساب کړئ.

.1 $\int \frac{\sqrt{x+4}}{x}\,dx = ?.$

.2 $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}\,dx = ?.$

.3 $\int \frac{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x}}{6\sqrt[4]{x}}\,dx = ?$

.4 $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3+1}}\,dx = ?$

.5 $\int \frac{x^{1/2}}{x^{\frac{3}{4}}+1}\,dx = ?$

.6 $\int \frac{x}{(x+1)(x+3)(x+5)}\,dx = ?$

.7 $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}\,dx = ?$

.8 $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)} = ?$

.9 $\int \frac{x^4\,dx}{(x^2-1)(x+2)} = ?.$

.10 $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}\,dx = ?$

.11 $\int \frac{dx}{x(x^2+1)} = ?$

.12 $\int \frac{3x+2}{x(x+1)^3}\,dx = ?$

.13 $\int \frac{2x^2-3x-3}{(x-1)(x^2-2x+5)}\,dx = ?$

.15 $\int \frac{x^5}{x^3-1}\,dx = ?$

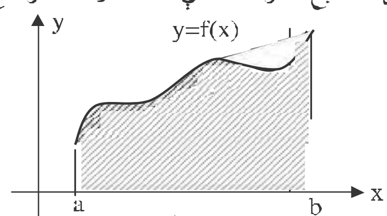
اتم فصل

د انتیگرال کارونه

1. د انتیگرال په واسطه د سطحې مساحت پیدا کول

د انتیگرال د استعمال ساحه ډېره پراخه ده،برسېره پر ریاضیاتواو انجینري په نورو علومو لکه کیمیا ، فزیک،نجوم، صنعت او حتی په اجتماعي او ټولنیزو علومو کې هم په زیاته پیمانه ګټه ورڅخه اخیستل کیږي. په دې ځای کې د انتیگرا ل د هغو مفهومونو د تطبیق ساحه په نظر کې نیسو تر کومه ځایه چې هغه مو لوستي دي او د نوروزیاتو معلوماتو په هکله به د دې کتاب په دوهم ټوک کې په پوره توګه پاملرنه ورته وشي .

په 7 .1 کې مو ولیدل چې که f په [a,b] کښې متماديي او غیر منفي وي په دې صورت کې د f انتیگرال د a څخه تر b پورې د هغې ناحیې مساحت دی ،چې د f تابع د ګراف لاندې د x=a او x=b تر منځ احاطه شوی وي.



ش (1)

1. مثال

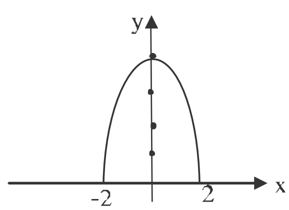
هغه مساحت پیداکړی چې د $f(x)=\sqrt{x}$ تابع د ګراف لاندې د x=0 او x=1 ترمنځ احاطه شوی وي

حل

$$A=\int_0^1\sqrt{x}dx=\left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3}$$

2. مثال

د هغې سطحې مساحت پیداکړی چې د پورته خوا څخه د $y = 4-x^2$ د ګراف او د لاندې خوا څخه د x محور په واسطه احاطه شوی وي:



ش (2)

حل

د تابع ګراف د x محور په 2- او 2 کښې قطع کوي او د هغې اړوند سطحې مساحت $\frac{32}{3}$ واحده دی. یعنې

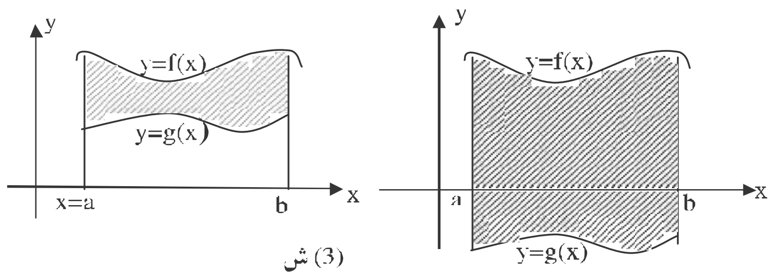
$$\int_{-2}^{2}(4-x^2)dx = \left|4x - \frac{1}{3}x^3\right|_{-2}^{2} = \frac{32}{3}$$

نوټ

داچې په پورتني مثال پورې اړوند مساحت y محورته په متناظر حالت کې پروت دی، په لنډ ډول یې داسې هم محاسبه کولی شو.

$$2\int_{0}^{2}(4-x^2)dx = 2\left|4x - \frac{1}{3}x^3\right|_{0}^{2} = 2\left(8-\frac{8}{3}\right) = 2\left(\frac{16}{3}\right) = \frac{32}{3}$$ (واحده)

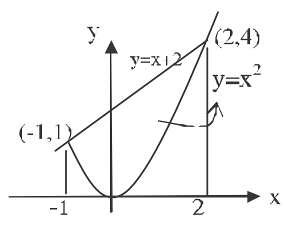
اوس غواړو چې د هغو سطحو مساحت پیدا کړو چې دیوې اندازې پورې نظر پورتني حالت ته پیچلی شکل لري، یعنې هغه سطحې په نظر کښې نیسو چې دوو یاڅو توابعو د ګرافونو ترمنځ او یا د توابعو د ګرافونو د لاندې او پاس خوا څخه د x=a او x=b په واسطه احاطه شوي وي (3شکل . دلته په هر صورت کښې د $A=\int_a^b (f(x)-f(g))dx$ انتیګرال مطلوب مساحت راکوي.



ش (3)

3. مثال

د هغې سطحې مساحت په نظر کښې نیسو، چې د پورته خوا څخه د y=x+2 او د لاندې خوا څخه د $y=x^2$ ګرافونو ترمنځ پروت وي. (4) شکل.



ش (4)

حل

د مساحت د پیداکولو له پاره لومړی د دوو معادلو د ګرافونو د تقاطع نقطې په لاس راوړو. لیکو چې.

$x+2=x^2 \Rightarrow x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)=0$

دوروستۍ رابطې څخه معلومیږي چې د ګرافونو د تقاطع نقطې د (1,1-) او (2,4) څخه عبارت دي او د مساحت له پاره لرو چې :

$$\int_{-1}^{2}((x+2)-x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2+2x-\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{2} = 2+4-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2+\frac{1}{3}\right)=\frac{9}{2}$$

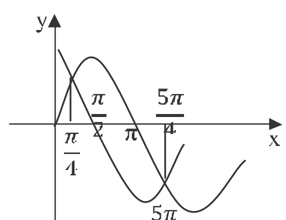
4. مثال

د (5)ش له مخې د y=sinx او y=cosx د ګرافونو تر منځ احاطه شوی مساحت پیدا کوو

حل

د ګرافونو د تقاطع نقطې مختصات د x په محور باندې $\frac{\pi}{4}$ او $\frac{5\pi}{4}$ دي لیکو چې:

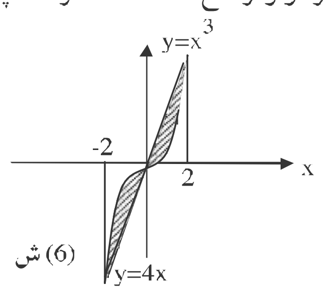
$$A=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}}(\sin x-\cos x)dx = [\cos x+\sin x]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} = 2\sqrt{2}$$



(5) ش

5. مثال

هغه مساحت پیدا کړی چې د y=4x او $y=x^3$ ګرافونو تر منځ د x=-2 څخه تر x=2 پورې احاطه شوی وی



(6) ش

حل (کورنی دنده).

6. مثال

د (7) ش له مخې د انتيګرال په واسطه د $A=A_1 \cup A_2$ سطحې مساحت و ښيي.

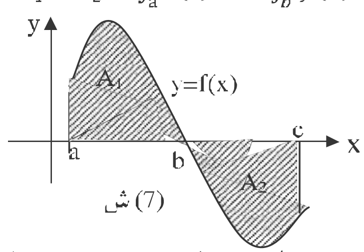
حل

د $x=a$ څخه تر $x=b$ پورې د $y=f(x)$ ګراف د x محور له پاسه همدارنګه د $x=b$ څخه تر $x=c$ پورې د $y=f(x)$ ګراف د x محور لاندې پروت دی، ليکو چې:

$$A_1 = \int_a^b f(x)dx$$

$$A_2 = \int_b^c f(x)dx = -\int_b^c f(x)dx$$

$$\Rightarrow A = A_1 \cup A_2 = \int_a^b f(x)dx - \int_b^c f(x)dx$$



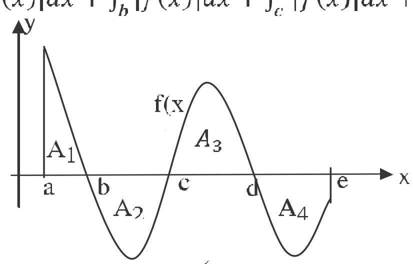
(7) ش

نوټ

د پورتني مثال څخه څرګنديږي چې د $A=A_1 \cup A_2$ سطحې مساحت د $A=A_1 - A_2$ څخه عبارت دی. يعنې د A مساحت ،د هغې سطحې مساحت چې د x محور د پاسه او د هغې سطحې مساحت چې د x محور لاندې پروت دی د تفريق حاصل په نتيجه کې په لاس راځي. دا په هغه صورت کې صدق کوي چې د [a,b] په انترول کې د f تابع له پاره د علامو تغير موجود وي ،نو په دې صورت کې لازمه ده چې د انتيګرالونو مطلقه قيمت څخه کار واخيستل شي او غير له دې مطلوب مساحت نه راکوي.

د مثال په توګه که لاندې شکل په نظر کې ونيسو ،يعنې که د $A=A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ مساحت پيدا کول مطلوب وي ،نو د $A=|A_1| + |A_2| + |A_3| + |A_4|$ څخه کار اخلو او ليکو چې:

$$A=\int_a^b|f(x)|dx + \int_b^c|f(x)|dx + \int_c^d|f(x)|dx + \int_d^e|f(x)|dx.$$

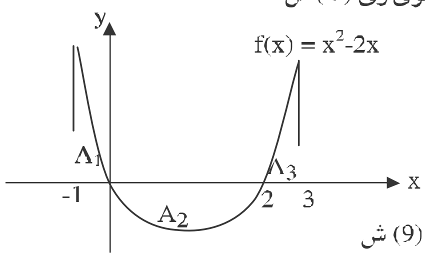


(8) ش

7. مثال

i) د $\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx$ انتیگرال حساب کړی

ii) د هغې سطحې مساحت پیدا کوو چې د $f(x)=x^2-2x$ تابع د گراف په واسطه د x محور پورته او لاندې خواو څخه او x= -1,x=3 تر منځ احاطه شوی وی.(9) ش



(9) ش

حل

i) $A=\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx = \left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{3}=\frac{4}{3}$

(i $A=A_1\cup A_2\cup A_3$

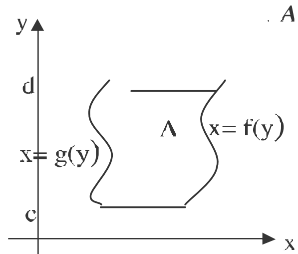
$A=\int_{-1}^{0}|x^2-2x|dx+\int_{0}^{2}|x^2-2x|dx+\int_{2}^{3}|x^2-2x|dx$

$=\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{-1}^{0}+\left|\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{0}^{2}\right|+\left[\frac{x^3}{3}-x^2\right]_{2}^{3}=\frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{4}{3}=4$

نتیجه $\int_{-1}^{3}(x^2-2x)dx\neq A$.

نوټ

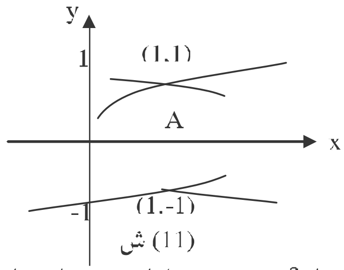
د x =f(y) او x=g(y) توابعو د گرافونو تر منځ سطحې مساحت پیدا کولو له پاره چې د y=c او y=d په واسطه احاطه شوی وي، لرو چې $A=\int_{c}^{d}|(f(y)-g(y))dy|$.



(10) ش

8. مثال

د هغې سطحې مساحت پیدا کړئ چې د کیڼې خوا د $x = y^2$ او د ښۍ خوا څخه د $x = 3-2y^2$ د ګرافونو تر منځ احاطه شوی وي .(11)ش



ش (11)

حل

لومړی د پورتنیو دوو تابعو د تقاطع نقطې د $x= y^2$ او $x =3-2y^2$ معادلو د یو ځای حل څخه په لاس راوړو . مومو چې د هغوی ګرافونو د تقاطع نقطې(1,1) او (1,-1) دي .

$$A = \int_{-1}^{1}\left[(3-2y^2)-y^2\right]dy$$

$$A = \int_{-1}^{1}\left[(3-2y^2)-y^2\right]dy$$

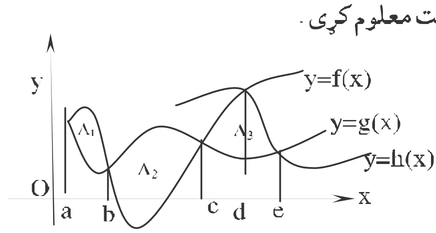
$$= \int_{-1}^{1}(3-3y^2)dy = \left[3y - y^3\right]_{-1}^{1} = 4$$

یا

$$A=2\int_0^1 [3-2y^2]\, dy = 2[3y - y^3]_0^1 = 4$$

9. مثال

د (12)ش له مخې د $A=A_1 + A_2 + A_3$ مساحت معلوم کړئ .



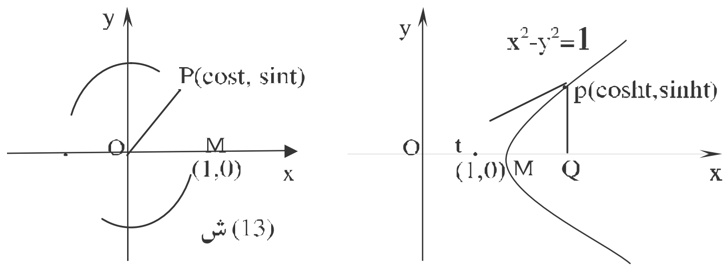
ش (12)

(کورنی دنده)

10. مثال

په 7.4 کې مودا وښودل چې د هایپربولیک او $x^2 - y^2 = 1$ (هایپربول) او همدارنګه د مثلثاتي توابعواو $x^2 + y^2 = 1$ دایرې تر منځ څه ډول رابطه موجوده ده. دلته یو بل ډول رابطه چې د مساحت سره اړیکې لري په لاس راوړو . پوهیږو چې د هر $t\in [0,\frac{\pi}{2}]$ له پاره په t پورې اړوند د $\frac{1}{2}t$ عدد د $x^2 + y^2 = 1$ دایرې، د هغې قطاع مساحت (OMP) راښیي چې پیل یې په(1,0) او پای یې په

(cost,sint) کې دی . همدارنګه د $t>0$ له پاره د $\frac{1}{2}t$ عدد د1 $x^2 - y^2 = 1$ هایپربول د هغې قطاع مساحت راښیي کوم چې پیل یې (1,0) او پای یې په (cosht,sinht) کې دی.



ش (13)

ثبوت

د هایپربول د قطاع مساحت A(t) بولو. په اسانۍ سره معلومیږي چې

$$A(t)=\frac{1}{2}cosh\,t\cdot\sinh t-\int_1^{cosht}\sqrt{x^2-1}\ dt \qquad \ldots \qquad (1)$$

د پورتنی رابطې د ښی خوا لومړی حد OPQ^{Δ} مثلث مساحت او د $\int_1^{cosht}\sqrt{x^2-1}\ dt$ انتیګرال د MPQ سطحې مساحت دی . ښیو چې د $\forall_{t>0}$ له پاره $A(t)=\frac{1}{2}t$ صدق کوی. له دې څخه لیکو چې:

$$A'(t)=\frac{1}{2};\forall_{t>0}\wedge A(0)=0$$

له بلې د (1) څخه لرو چې:

$$A'(t)=\frac{1}{2}[\cosh t\frac{d}{dt}(\sinh t)+\sinh t\frac{d}{dt}(\cosh t)]-\frac{d}{dt}(\int_1^{cosht}\sqrt{x^2-1}\ dt)$$
$$A'(t)=\frac{1}{2}(cosh^2t+sinh^2t)-\frac{d}{dt}(\int_1^{cosht}\sqrt{x^2-1}dx)\ \ldots. \qquad (2)$$

$$\frac{d}{dt}(\int_1^{cosht}\sqrt{x^2-1}dx)=\int_1^{cosht}\sqrt{cosh^2t-1}\,\frac{d}{dt}(\cosh t)$$

$$=\sinh t\cdot\sinh t=sinh^2t\ .$$

اخیرنی رابطه په (2) کې وضع کوو :

$$\Rightarrow A'(t)=\frac{1}{2}(\cosh^2 t+\sinh^2 t)-\sinh^2 t$$

$$=\frac{1}{2}(\cosh^2 t-\sinh^2 t)=\frac{1}{2}.$$

$$\Rightarrow A(t)=\frac{1}{2}t+c\Rightarrow A(0)=\frac{1}{2}\cdot 0+c=0\Rightarrow c=0$$

$$\Rightarrow A(t)=\frac{1}{2}t.$$

2. د انتیګرال تطبیق په انجینري او ریاضیکي مسایلو کې

(a) کار (work)

د کار مفهوم سره په ورځني ژوند کې پوره اشنایي لرو او پوهیږو چې کار څه ته ویل کیږي او په فزیک کې کار د یو ځانګړي تخنیکي مفهوم په درلودلو ، د قوې سره مستقیمه اړیکه لري.په عمومي توګه که یو جسم د یو مستقیم خط په امتداد چې د حرکت معادله یې S(t) ده حرکت وکړي ، نو په جسم باندې مؤثره قوه د نیوټن د دوهم قانون له مخې په لاندې ډول ده :

$$f = m \cdot \frac{d^2 s}{dt^2} \quad \ldots \tag{3}$$

دلته د SI په متریک سیستم کې ،کتله په (kg) ، د جسم په واسطه طی شوي فاصله په متر(m) او وخت په ثانیه اندازه کیږي. که تعجیل ثابت وي، نو اجرا شوی کار ،د قوې او د جسم په واسطه د وهل شوي فاصلې(d) د ضرب د حاصل څخه په لاس راځي . یعنې:

$$w = f \cdot d = (\text{فاصله}\times\text{قوه}=\text{کار}) \quad \ldots \tag{4}$$

دلته که f په نیوټن، d په متر اندازه شي نو د کار واحد نیوټن متر(Nm) دی چې ژول(joul) ورته ویل کیږي .(4) معادله د کار مقدار په هغه صورت کې راکوي چې قوه ثابته وي . که قوه د یوه متحول په څېر ومنو ، په دې حالت کې به د اجرا شوي کار په اړه څه پوه شی ؟. د دې مطلب د واضح کولو له پاره فرض کوو چې جسم د x محور په امتداد په مثبت جهت د x=a څخه تر x=b پورې داسې حرکت کوي چې د a او b تر منځ په هره نقطه(x) کې د f(x) مؤثره قوه په جسم باندې عمل کوي په داسې حال کې چې f په [a,b] کې متمادي دی .د معین انتیګرال د هندسي مفهوم په شان دلته هم د[a,b] انترول په n فرعي انترولونو باندې چې د پای نقطې یې $x_0, x_1, \ldots, x_n$ دي ، داسې وېشو چې Δx په هغې کې مساوي قیمتونه لري. دلته موږ خپل هدف ته د رسیدو په خاطر د x_i^*نقطه په i– ام فرعي انترول $[x_{i-1}, x_i]$ کې انتخاب کوواو د قوې مقدار په دې نقطه کې $f(x_i^*)$ کیږي. نوکه n ډېر زیات شي Δxډېر کوچنی کیږي .دا چې f متمادي ده د f قیمتونه د $[x_{i-1}, x_i]$ په انترول کې په متمادي ډول په ډېر کم تفاوت سره تغیر کوي. یا په بل عبارت f په دې انترولونو کې تقریباً ثابت حالت غوره کوي .نو په دې انترول کې د کار مقدار(w_i)کیږي. لیکو چې
$w_i \approx f(x_i^*) \cdot \Delta x$

چې په دې ترتیب د [a,b] په انترول کې مجموعي کار د لاندې فرمول په واسطه تخمین کولی شو :

$$W = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x \quad \ldots \tag{5}$$

$$\Rightarrow w = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)\,dx \quad \ldots \tag{6}$$

11. مثال

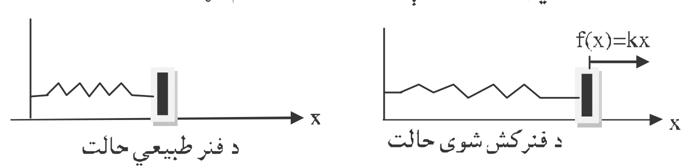
که یو جسم د مبدا څخه د x متر په فاصله پروت وي او $x^2 + 2x$ نیوټن قوه په هغې باندې عمل وکړي ، د کار مقدار په هغه صورت کې پیدا کړئ چې جسم د x=1 څخه تر x=3 پورې فاصله ووهي

$$W=\int_1^3 (x^2+2x)dx = [\frac{x^3}{3}+x^2]_1^3 = \frac{50}{3}$$

یعنې د اجرا شوي کار مقدار $\frac{50}{3}$ واحده د کار دی .

12. مثال

د یوه فنر د کش کولو له پاره د خپل طبعي اوږدوالي 10 cm څخه تر 15 cm پورې 40 N قوه په کار ده .د فنر د 15 cm څخه تر 18 cm کشوالي په صورت کې د کار مقدار معلوم کړی .



(14) ش

حل

د هوک قانون له مخې د فنر د کش کولو له پاره د x متر فاصلې په اندازه f(x)=kx واحده قوه په کار ده . نو کله چې فنر د 10 cm څخه تر 15 cm پورې کش شي د کش کولو اندازه 0.05m او f(0.05)=40 کیږي. لروچې :

$$0.05k=40 \Rightarrow k = \frac{40}{0.05} = 800 \Rightarrow f(x) = 800x$$

په نتیجه کې د فنر د کشوالي په صورت کې د 15 cm څخه تر 18 cm پورې د کار مقدار په لاندې ډول دی :

$$W = \int_{0.05}^{0.08} 800x\, dx = [800 \cdot \frac{x^2}{2}]_{0.05}^{0.08} = 400[(0.08)^2 - (0.05)^2] = 1.56 \text{ J}$$

13. مثال

200-lb کېبل چې 100-ft اوږدوالی لري ، د یوه لوړ تعمیر د سر څخه عموداً په ښکته خوا ځوړند شوی دی . د کېبل د پورته کولو په صورت کې د تعمیر تر سر پورې څومره کار تر سره کیږي .

حل

دلته د قوي له پاره کوم فرمول نه لرو او د (6) معادلې د لاس ته راوړلو په شان ، د قوي له پاره فرمول پیدا کولی شو.یعنې د کېبل وزن 2 lb/ft دی ،او په $i-$ ام انترول کې د x_i^* نقطې له پاره د کار مقدار په لاندې ډول پیدا کوو:

$$\underbrace{2\,\Delta x}_{\text{قوه}}\quad \underbrace{x_i^*}_{\text{فاصله}} = 2\,x_i^*\ \Delta x$$

$$\Rightarrow w = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} 2\,x_i^*\ \Delta x = \int_0^{100} 2x\,dx$$

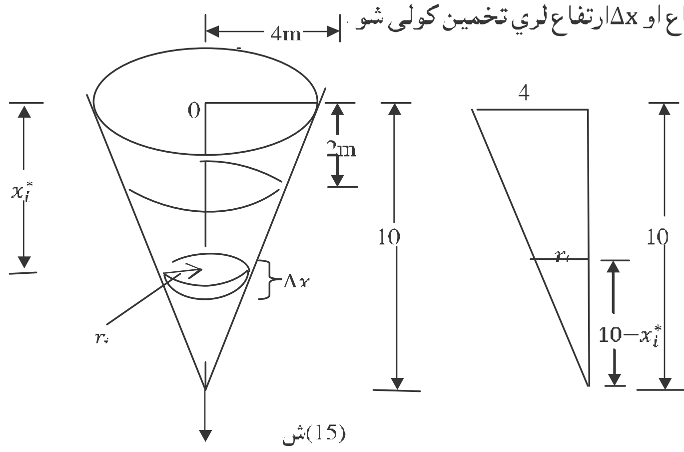
$$= [x^2]_0^{100} = 10000\ ft-lb$$

14. مثال

یو مخروطي شکله لوښی((15) ش) چې لوړوالی یې 10 m او د قاعدې شعاع یې 4m ده په نظر کې ونیسی ،چې داوبو څخه د 8 m په لوړوالي ډک شوی دی . د هغې کار مقدار معلوم کړی چې د پمپ په واسطه دلوښي څخه د اوبو د خالي کیدو په صورت کې په لاس راځي .

حل

د لوښي ژوروالی د پورته خوا څخه په ښکته خوا د یوه عمودي محور(x) په واسطه سره ښیو .په لوښي کې اوبه د شکل له مخې د2 m ژوروالي څخه تر 8 m ژوروالي پورې ځای شوي دي . موږ د [2.10] انترول په n فرعي انترولونو باندې چې د پای نقطې یې$x_0, x_1, \dots, x_n$ دي وېشو او x_i^* د $i-$ ام په انترول کې انتخاب کوو. دا تقسیمات په لوښي کې د اوبو مقدار په n طبقو باندې ویشي او $n-$ ام طبقه د یوه دایروي سلنډر په واسطه چې د r_i شعاع او Δxارتفاع لري تخمین کولی شو .



(15)ش

د r_i شعاع د(15) ش له مخې د مثلثونو د تشابه څخه په لاس راځي. یعنې

$$\frac{r_i}{10-x_i^*}=\frac{4}{10}\Rightarrow r_i=\frac{2}{5}(10-x_i^*)$$

او د اوبو حجم په i– ام طبقه کې د

$$v_i=\pi r_i^2\cdot\Delta x=\frac{4\pi}{25}(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

سره مساوي دی .همدارنګه پوهیږو چې :

$m_i =$ حجمx کثافت

$$m_i\approx 1000\cdot\frac{4\pi}{25}(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

$$=160\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

او هغه قوه چې ددې طبقې د اوبو د خالي کولو له پاره په کار ده د ځمکې د جاذبې قوې یعنې د

$$f_i=m_ig\approx(9.8)\cdot 160\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x\approx 1570\pi(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

سره مساوي دی اود اوبو د طبقې هره ذره د x_i^* په اندازه فاصله لنډوي. نو هغه کار چې ددې طبقې د خالي کولو له پاره په کار دی ،$w_i\approx f_ix_i^*\approx 1570\pi x_i^*(10-x_i^*)^2\,\Delta x$ کیږي .او مجموعي کار رپه لاندې ډول دی:

$$W=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}1570\pi x_i^*(10-x_i^*)^2\,\Delta x$$

$$=\int_2^{10}1570\pi x(10-x)^2\,dx$$

$$=1570\pi\left[50x^2-\frac{20x^3}{3}+\frac{x^4}{4}\right]_2^{10}$$

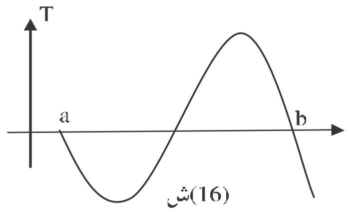
$$=1570\pi\left(\frac{2048}{3}\right)\approx 3.4\cdot 10^6\,J\quad.$$

(b) د تابع متوسط قیمت

د تابع متوسط قیمت په هغه صورت کې چې د تابع محدود قیمتونه، $y_1, y_2, \dots, y_n$ راکړل شوي وي په اسانی سره معلومولی شو. یعنې

$$y_{ave}=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_1}{n}$$

او که د ورځې د حرارت درجې اوسط په نظر کې ونیسو،داسې چې د ورځې له خوا د حرارت درجې د معلومولو امکان په غیر محدود ډول راکړل شوی وي.(16) ش . د مطلب د پوهیدو له پاره د حرارت تابع (T(t)) ګراف چې t په ساعت اوT په سانتیګراډ اندازه کیږي ، په نظر کې نیسو .



ش(16)

دلته هم د کار د فرمول د پیدا کولو په شان د [a,b] انترول په فرعي انترولونو باندې وېشو او د متوسط قېمت له پاره مناسب فرمول په لاس راځي. یعنې:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

15. مثال

د $f(x)=1+x^2$ تابع متوسط قېمت د [-1,2] په انترول کې پیدا کړی.

حل

دلته $a=-1$ او $b=2$ دی. لرو چې:

$$f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{2-(-1)}\int_{-1}^{2}(1+x^2)dx$$

$$=\frac{1}{3}[x+\frac{x^3}{3}]_{-1}^{2} = 2\,. \qquad [12]$$

یعنې که f د [a,b] په انترول کې متمادي وي د انتیګرال متوسط قېمت دعوې په واسطه د تابع متوسط قېمت د [a,b] په انترول کې پیدا کولی شو .لیکو چې

$$f(c) = f_{ave} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

$$\Rightarrow \int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

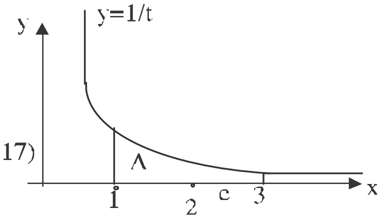
(c) د انتیګرال په واسطه د طبعي لوګاریتم تخمین کول

1.8 تعریف

د $\ln x = \int_1^x \frac{1}{t}dt\,; x>0$ تابع ته د طبعي لوګاریتم تابع ویل کیږي.

i) ددې تعریف په واسطه کولی شو چې د lne عدد په هندسي توګه درته وښیو . پوهیږو چې $\ln e = 1$ دی او دا عدد د تعریف له مخې د هغې سطحې مساحت رابښئي کوم چې د $y=\frac{1}{t}$ تابع د ګراف لاندې د $t=1$ او $t=e$ په واسطه احاطه شوی وي چې د سطحې د 1 واحد سره برابر دی.

ii) د تعریف په مرسته کولی شو چې د lnx قمتونو تخمین په ښه توګه سره درته وښیو.(17) ش



16. مثال

دلته غواړو چې د ln2 قیمت تخمین کړو :

حل

د ln د تعریف څخه پوهیږو چې :

$$\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{t} dt$$

دا د هغې سطحې مساحت دی چې د $y = \frac{1}{t}$ تابع د ګراف لاندې د $t = 1$ او $t=2$ تر منځ احاطه شوی وي . د موضوع د ښه څرګندولو په خاطر $f(t) = \frac{1}{t}$ له پاره $L_f(p), U_f(p)$ تشکیلوو. د مثال په توګه:

$$L_f(P) = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \frac{10}{13} + \frac{10}{14} + \cdots + \frac{10}{20}\right)$$
$$= \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} > 0.668$$

او

$$U_f(P) = \frac{1}{10}\left(\frac{10}{10} + \frac{10}{11} + \frac{10}{12} + \frac{10}{13} + \cdots + \frac{10}{20}\right)$$
$$= \frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \cdots + \frac{1}{20} < 0.719$$
$$\Rightarrow 0.668 < L_f(P) \le ln2 \le U_f(P) \le 0.719.$$

دلته د پورتنیو دوو تخمینونو اوسط $\frac{1}{2}(0.668+0.719) = 0.6935$ دی چې د څلورو اعشاري رقمونو پورې روندناف شوی دی . دا رقم د هغه رقم سره چې د کلکولیټر په مرسته په لاس راځي د ln2 د قیمت سره ډېر نږدې والی لري .

(d) انتیگرال د یو متحرک جسم د فاصلې، سرعت او تعجیل په پیدا کولو کې

17. مثال

یو متحرک جسم د $v(t) = 2-3t+t^2$ په سرعت سره په یوه ثانیه کې حرکت کوي ، داسې چې د $t=0$ په وخت کې د2 واحدو په فاصله د مبدا په ښي خوا کې پروت دی . د جسم موقعیت د 4 ثانیو وروسته پیدا کړی.

حل فرض کوو چې $x(t)$ د جسم موقعیت د t په وخت کې دی .چې$x(0) = 2$ او $x'(t) = v(t)$ کیږي. نو

$$x(t) = \int v(t)dt = \int(2-3t+t^2)dt$$

$$x(t)=2t-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+c \ .$$

څرنګه چې $x(0)=2\cdot 0-\frac{3}{2}\cdot 0^2+\frac{1}{3}\cdot 0^3+c=2$ دی نو $c=2$ کیږي .

$$x(t)=2t-\frac{3}{2}t^2+\frac{1}{3}t^3+2 \ .$$

او د $t=4$ له پاره لرو چې:

$$x(4)=2.4-\frac{3}{2}.4^2+\frac{1}{3}.4^3+2=\frac{22}{3} \text{(واحده)}$$

یعنې د $t=4$ ثانیې په اخېر کې د جسم موقعیت$\frac{22}{3}$ واحدو په فاصله د مبدا په ښي خوا کې دی.

دا هم زیاتوو چې د جسم د حرکت تیزي د جسم د سرعت د مطلقه قیمت څخه عبارت دی. یعنې$|v(t)|$ د جسم تیزي د t په وخت کې او د تیزي انتیګرال یعنې $\int_a^b|v(t)|dt$ د جسم فاصله د $t=a$ څخه تر $t=b$ پورې راکوي .

18. مثال

یو جسم د x محور په امتداد د $a(t)=2t-2$ تعجیل له مخې حرکت کوي . د هغې اولنی موقعیت ، یعنې په $t=0$ کې د 5 واحدو په فاصله د مبدا په ښي خوا کې دی .یوه ثانیه وروسته جسم د مبدا په کینه خوا کې د 4 واحدو په فاصله په یوه ثانیه کې حرکت کوي.

i)د جسم موقعیت په $t=4$ ثانیه کې پیدا کړی .

ii) د جسم له خوا طی شوي فاصله د $t=4$ ثانیې په اخېر کې پیدا کړی .

حل

i) که x(t) او v(t) په ترتیب سره د جسم موقعیت او سرعت د t په وخت کې وي لرو چې x(0)=5 او v(1)=-4 دی. داچې $v'(t) = a(t)$ کیږي نو:

$$v(t)=\int a(t)dt = \int(2t-2)dt = t^2 - 2t + c \ .$$

څرنګه چې v(1)=-4 دی نو

$$\Rightarrow v(1) = 1 - 2 + c = -4 \Rightarrow c = -3$$

$$v(t)= t^2 - 2t - 3 \ .$$

دی او د x(t) له پاره لیکو چې :

$$x(t) =\int v(t)d\,t =\int (t^2 - 2t - 3)dt$$

$$=\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t + k$$

د پورته په شان پوهیږو چې x(0)=5 دی، نو k=5 کیږي او $x(t) =\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t + 5$ د t=4 ثانیې په اخېر کې $x(4)= -\frac{5}{3}$ کیږي. یعنې جسم د مبدا په کینه خوا کې د $\frac{5}{3}$ واحدو په فاصله کې پروت دی.

ii) د جسم له خوا طی شوي فاصله د t=4 ثانیو وروسته په لاندې ډول ده :

$$S=\int_0^4|v(t)|dt = \int_0^4|t^2 - 2t - 3|dt$$

څرنګه چې:
$$|t^2 - 2t - 3| = \begin{cases} -(t^2 - 2t - 3)\,; 0 \le t < 3 \\ t^2 - 2t - 3 \ ; \ 3 \le t \le 4 \end{cases}$$ دی، نو

$$S = \int_0^3(3 + 2t - t^2)dt + \int_3^4(t^2 - 2t - 3)dt$$

$$= \left[3t + t^2 - \frac{1}{3}t^3\right]_0^3 + \left[\frac{1}{3}t^3 - t^2 - 3t\right]_3^4 = \frac{34}{3} \ .$$

یعنې د t=4 ثانیو وروسته د جسم له خوا طی شوي فاصله $\frac{34}{3}$ واحده ده. [12].

(e) د تیلور فرمول (Taylor[11])

د تفاضلي په حساب کې مو ولیدل چې د مشتق په واسطه د تابع په مورد ځنې مهم معلومات په لاس راوړلی شو. او ځینې نور معلومات چې د توابعو د قیمتونو په تخمین کې په انجنیري کې ډېر ورسره مخامخ کیږو . په دې ځای کې تر کتنې لاندې نیسو. په اکثرو موضوعاتو کې دا لازمه ښکاري چې که د f

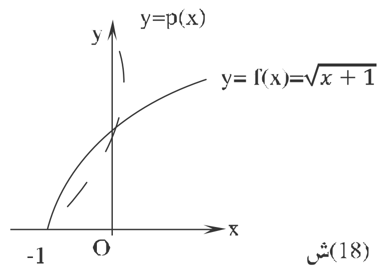
---

[11] Taylor (1685-1731) انګلیسي ریاضي دان.

تابع د $[a, b]$په یوه انترول کې راکړل شوي وي ،د امکان په صورت کې هغه د یوې بلې ساده تابع په واسطه مثلاً د یوه پولینوم په واسطه د ضرورت په وخت کې باید ساده کړل شي.دا جوته ده چې که په خپله تابع یو پولینوم نه وي یوه غلطي منځ ته راځي او معمولاً دا کوښښ کیږي چې د f تابع د $f(x)=T_n(x)+R_n(x)$ په شکل ولیکل شي. دلته $T_n(x)$ یو n-ام درجه پولینوم او $R_n(x)$ یو باقیمانده دی .یعنې د خبط (غلطي) یوه برخه ده چې د امکان په صورت کې باید ډېره کوچنی وي.د دا ډول تخمین یو د امکان صورت د تیلور(Taylor) فرمول دی.

19. مثال

$f(x)=\sqrt{x+1}$ تابع د $[-1,1]$ په انترول کې د $p(x)=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x^3$ سره ډېر کم تفاوت لري.



(18)ش

مثلاً

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{x+1}dx=\frac{2}{3}\left[\sqrt{(x+1)^3}\right]_{-1}^{1}=\frac{4}{3}\sqrt{2}\cong 1.885$$

او

$$\int_{-1}^{1} p(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{8}x^3\right)dx$$

$$=\left[x+\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{12}+\frac{3x^4}{32}\right]_{-1}^{1}\cong 1.833$$

د موضوع د وضاحت په خاطر اول هغه حالت په نظر کې نیسو چې تابع په خپله یو پولینوم دی.

1.8 دعوی

که چیرې $f(x)=\sum_{j=0}^{n} a_j x^i$ یو پولینوم او $x_0 \in \mathbb{R}$ وي ، په دې صورت کې f په $\mathbb{R}$ کې په لاندې ډول لیکلی شو :

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}\frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}(x-x_0)^j$$

ثبوت

پوهیږو چې

$$f(x)=\sum_{j=0}^{n}a_j x^i=\sum_{j=0}^{n}a_j(x-x_0+x_0)^j$$

$$=\sum_{j=0}^{n} a_j \left(\sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} (x-x_0)^k \cdot x_0^{\,j-k}\right) = \sum_{j=0}^{n} b_j (x-x_0)^j$$

په دې صورت کې د $b_j \in \mathbb{R}$ ضریبونه معلوم دي (چې د $\sum$د انکشاف څخه وروسته په واضح ډول معلومیږي). دلته د $x=x_0$ له پاره مومو چې $f(x_0)=b_0$ یعنې $b_0 = \frac{f^{(0)}(x_0)}{0!}$. اوس که چیرې د $f(x)$ تابع j مرتبه($1\leq j \leq n$) مشتق و نیسو په دې صورت کې

$$f^{(1)}(x) = \frac{df}{dx} = \sum_{\ell=1}^{n} b_\ell \cdot \ell(x-x_0)^{\ell-1}$$

$$f^{(2)}(x) = \frac{d^2f}{dx^2} = \sum_{\ell=2}^{n} b_\ell \cdot \ell(\ell-1)((x-x_0)^{\ell-2}$$

$$\vdots$$

$$f^{(j)}(x) = \sum_{\ell=j}^{n} b_\ell \cdot \ell(\ell-1)\cdots(\ell-(j+1))\cdot(x-x_0)^{\ell-j}$$

او د $x=x_0$ له پاره مومو چې

$$\Rightarrow f^{(j)}(x_0) = b_j \cdot j! \Rightarrow b_j = \frac{f^{(j)}(x_0)}{j!}$$

چې په دې ډول دعوی په ثبوت رسیږي. ■

نتیجه

دلته داسې معلومیږي چې یو n –ام درجه پولینوم په هغه صورت کې چې که د x_0 په یو کیفي قیمت سره $f^{(n)}(x_0), \ldots, f^{(1)}(x_0)$ مشتقات و پیژنو، کاملاً معلوم دی. دا چې یو پولینوم کاملا واضح دی کولی شو چې د هغې په اړوند ټول خواص د $U(x_0)$ په یو مجاورت کې هم وپیژنو. اوس که چیرې په کافي ډول د اشتقاق وړ یوه تابع(f)راکړل شوي وي، ښیو چې دا ډول تابع د پولینومونو په واسطه تخمین کولی شو.بیا هم د مطلب د وضاحت له پاره لاندینی مثال په نظر کې نیسو :

20. مثال

د $|x| < 1$ او $n \in \mathbb{N}$ له پاره لاندینی مجموعه مطالعه کوو :

$$\sum_{k=0}^{n-1} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^{n-1}$$

$$= \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{1}{1-x} - \frac{x^n}{1-x}$$

او د $f(x)=\frac{1}{1-x}$ تابع د $|x| < 1$ له پاره په لاندې ډول ښودلی شو :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x}$$

د تابع د مشتقاتو پیژندلو په صورت کې لیکو چې :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = f^{(0)}(x) \qquad ; \qquad f^{(0)}(0) = 1 = 1!$$

$$f'(x) = f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} \qquad ; \qquad f^{(1)}(0) = 1 = 1!$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3} \qquad ; \qquad f^{(2)}(0) = 1\cdot 2 = 2!$$

$$f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4} \qquad ; \qquad f^{(3)}(0) = 1\cdot 2\cdot 3 = 3!$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}{(1-x)^{k+1}} \qquad ; \qquad f^{(k)}(0) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots k = k!$$

او د $1 > |x|$ له پاره لیکو چې

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k + \frac{x^n}{1-x} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{x^n}{1-x}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{x^n}{1-x}$$

او د $x_0 = 0$ له پاره په لاس راځي چې

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \frac{x^n}{1-x} = T_n(x) + R_n(x)$$

يعنې

$$T_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k \;\; ; \;\; R_n(x) := \frac{x^n}{1-x}$$

لاندينی دعوی رابنئي چې پورتنی ډول د توابعوتخمين د نورو كلاسونو د توابعود تخمين له پاره هم پكارولی شو.

2.8 دعوی (د تیلور فرمول)

که چیرې د f تابع په $[a, b]$ کې لږ تر لږه $n+1$ -مرتبه د اشتقاق وړ، $0 \in (a, b)$ او مشتقات ئې متمادي وي په دې صورت کې د هر $x \in [a, b]$ له پاره د

$$f(x) = T_n(x) + R_n(x)$$

فرمول صدق کوي چې دلته $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k$ ته د تیلور فرمول او بقیه ئې

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

کیږي.

ثبوت (اندکشن)

i) د $x \in [a, b]$ له پاره دعوی په $n=0$ کې صدق کوي.لیکو چې :

$$f(x) = f(0) + f(x) - f(0) = f(0) + \int_0^x f'(t)dt = T_0(x) + R_0(x).$$

يعنې دعوه د $n=0$ له پاره سمه ده.

ii) فرضوو چې پورتنی فرمول د n-1 له پاره سم دی ، یعنې

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_{n-1}(x)$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)\, dt$$

اوس د $R_{n-1}(x)$ بقیې ته په لاندې ډول د شکل تغیر ورکوو او د قسمي انتیګرال د استعمال له مخې لیکو چې :

$$R_{n-1}(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1} f^{(n)}(t)dt = -\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{(x-t)^n}{n} f^{(n)}(t)\right]_0^x$$
$$+ \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{n}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$$
$$= \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x)$$

بنا پر دې :

$$\Rightarrow f(x) = T_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + \frac{f^{(k)}(0)}{n!}(x)^n + R_n(x)$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k + R_n(x). \blacksquare$$

21. مثال

د $f(x)=e^x$ د $x_0 = 1$ له پاره په نظر کې نیسو. د دې تابع د مشتقاتو په نظر کې نیولو او د تایلور فرمول د تطبیق په اساس لیکو چې

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e^x \Rightarrow f^{(0)}(1) = e$$

$$f'(x) = f^{(1)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(1)}(1) = e\ .$$

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(2)}(1) = e\ .$$

$$\vdots$$

$$f^{(n)}(x) = e^x \Rightarrow f^{(n)}(1) = e\ .$$

$$\Rightarrow f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$$

یا

$$e^x \cong e + e(x-1) + \frac{e(x-1)^2}{2!} = \frac{2e+2e(x-1)+e(x-1)^2}{2}$$

$$= \frac{2e+2ex-2e+ex^2-2ex+e}{2} = \frac{e(1+x^2)}{2} = 1.35(1+x^2)\ .$$

دلته په حقیقت کې د $f(x)=e^x$ تابع د یوه دوهمه درجه پولینوم پواسطه تخمین کړی شو ، چې دا تخمین د $x\in[0,1]$ له پاره مناسب دی.

نوټ

ددې له پاره چې د تیلور فرمول په عمل کې د استفادې لاندې ونیول شي ، لاژمه ده چې پوه شو ، چې په کومه اندازه د تیلور فرمول د اصل تابع یعنې f(x) سره نږدې والی لري . ددې مقصد له پاره باید د $R_n(x)$ بقیه تخمین کړل شي.

3.8 دعوی

د θ یو عدد د (0,1) په انټرول کې موجود دی داسې چې د هغې له پاره د J.L. Logrange (1736-1813)

فرمول یعنې $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}$ صدق کوي.

ثبوت

پوهیږو چې $R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt$ دی. او د انتیګرال د وسطي قیمت دعوې له مخې یو $\theta \in (0,1)$ موجود دی چې :

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\int_0^x (x-t)^n\,dt$$

$$=\left[\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)}\right]_0^x = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}\cdot x^{n+1}.$$

22. مثال

د تیلور فرمول د $f(x)=e^{1-x}$ له پاره په هغه صورت کې چې n = 5 وي ولیکی.

$$f^{(0)}(x) = f(x) = e^{1-x} \Rightarrow f^{(0)}(0) = e$$

$$f^{(1)}(x) = -f(x) = -e^{1-x} \Rightarrow f^{(1)}(0) = -e$$

$$f^{(2)}(x) = f(x) = e^{1-x} \Rightarrow f^{(2)}(0) = e$$

$$f^{(3)}(x) = -f(x) = -e^{1-x} \Rightarrow f^{(3)}(0) = -e$$

$$f^{(4)}(x) = f(x) = e^{1-x} \Rightarrow f^{(4)}(0) = e$$

$$f^{(5)}(x) = -f(x) = -e^{1-x} \Rightarrow f^{(5)}(0) = -e$$

$$\Rightarrow T_5(x) = \sum_{k=0}^{5}\frac{f^{(k)}(0)x^k}{k!} = e - \frac{e}{1}x + \frac{e}{2}x^2 - \frac{e}{3!}x^3 + \frac{e}{4!}x^4 - \frac{e}{5!}x^5.$$

$$\Rightarrow T_5(x) = e\left(1 - \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^5}{5!}\right)$$

نوټ

د تیلور فرمول د $x_0 \in (a, b)$ له پاره لاندې شکل لري :

$$f(x) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x, x_0)$$

او $R_n(x, x_0) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt$ کیږي‌چې د پورته په شان په ثبوت رسیږي. [25]

نهم فصل

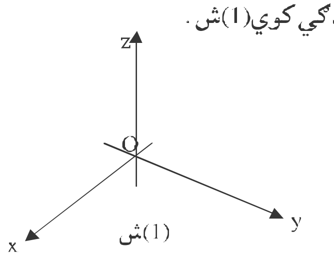
د درې بعدي فضا ځینې مفاهیم او وکتورونه

1. د درې بعدي فضا ځینې مفاهیم

څرنګه چې دانجینري مسلک مختلفې څانګې لري اود هرې څانګې وده او پرمختګ د وکتورونو ، د دوه متحوله توابعو او په فضا کې د منحنیاتو سره مستقیمې اړیکې لري، ددې پرته یو انجینر نه شي کولی چې دخپل مسلک د ودې په خاطر کافي معلومات راټول کړي.نو ځکه موږ په دې فصل کې وکتور او ځینو فضایي مفهومونو ته خاص ځای ورکړی دی اود هر یو مفهوم به بېل بېل په انجینري پورې د اړوند مثالونو سره یو ځای وړاندې کړو .مخکې له دې چې اصل موضوع ته را داخل شو، د قائیمو مختصاتو درې بعده سیستم او ځنې نور مفهومونه درته معرفي کوو .

i) د قائیمو مختصاتو درې بعده سیستم

پوهېږو چې د قایمو مختصاتو په دوه بعده سیستم کې د سطحې هره نقطه د یوې مرتبې جوړې(a,b) او هره مرتبه جوړه د سطحې د یوې نقطې سره یو په یو اړیکه لري . د قایمو مختصاتود درې بعده سیستم له پاره د"O" یوه ثابته نقطه (مبدا) په فضا کې انتخاب کوو او بیا درې جهت لرونکې خطونه(د مختصاتو محورونه) چې د(O) نقطې څخه تېرېږي داسې چې هر دوه یې یو پر بل عمود دي په نظر کې نیسوچې په دې ترتیب د قائیمو مختصاتو درې بعده سیستم په لاس راځي . په دې ځای کې د قایمو مختصاتودرې بعده سیستم محورونه y,x او z بولو چې د z جهت د ښي لاس د قانون له مخې ټاکل کیږي. دلته هم د فضا د هرې نقطې او یوې درې تایی (c,b,a) تر منځ یو په یو اړیکه موجوده ده، داسې چې د b,a او c حقیقي عددونه دي چې د a د x ، د b د y او د c د z مختصو څخه نمایندګي کوي(1)ش .

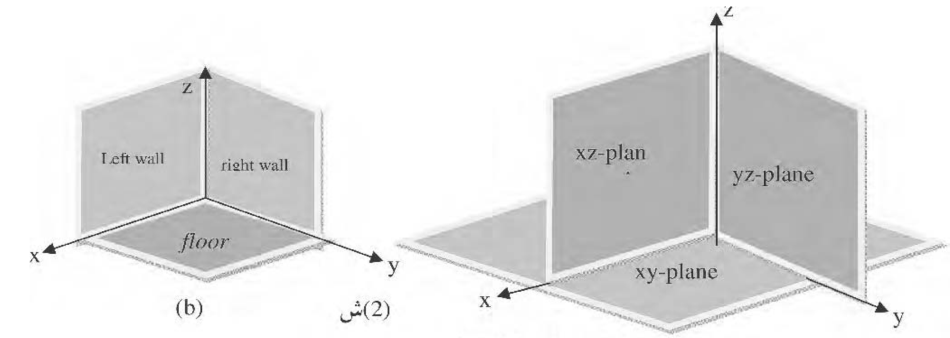


ش(1)

همدارنګه د مختصاتوپه درې محورونوپورې د مختصاتو درې مستوی یعنې xy- مستوي ، yz- مستوي او xz– مستوي اړه لري چې هره یوه یې په ترتیب سره د x او y ، y او z ، د x او z محورونه په ځان کې لري . دا هم باید زیاته کړو چې دغه درې مستوی، فضا په اتو برخو ویشي او هره برخه یې داتمې په نوم یادیږي .په اوله اتمه کې د y,x او z علامې (+,+,+) دي .او په نورو برخو کې یې علامې دقایمو مختصاتو د دوه بعده سیستم په شان معلومولی شو .

ډېر خلک په درې بعده فضا کې د ګراف رسمولو په برخه کې مشکلات لري او په دې برخه کې لاندېنی بیان ښه کومک در سره کولی شي .د کوټې یوه لاندېنې کونج ته وګوری او هغه د مبدا په څېر

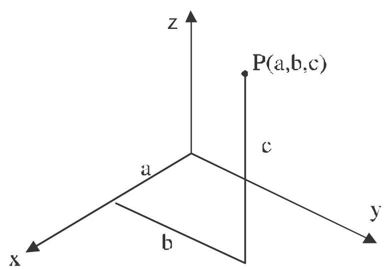
قبول کړی. د تاسي د کينې لاس دیوال د xz– مستوي او د ښي لاس دیوال د yz– مستوي او د کوټې تل د – xy مستوي څخه عبارت دی . (2) ش



(b) (2)ش

(a) Coordinate plane

په دې ځای کې د تاسي چپ خواته دیوال دx محور ،ښی خواته دیوال د yمحور اوz محور د پورته په لور مثبت قبول شوي دی او د تاسي موقعیت په اوله اتمه (first octant) کې دی . په همدې ترتیب اووه نورې کوټې موجودې دي چې درې يې په دې فرش کې چې تاسې په کې ولاړ یی او څلور نور يې د دې فرش لاندې خواته پرتې دي ،چې ټول اته اوکتانته کیږي .اوس کهPد فضا يوه نقطه ،اوa د مبدا څخه دP نقطې جهت لرونکې فاصله د yz– په مستوي ،bدPنقطې فاصله دمبدا څخه دxz په مستوي کې اوc د P نقطې فاصله د مبدا څخه د xy- په مستوي کې وي ، نو په دې صورت کې دP نقطه د (a,b,c) درې تایی په واسطه ښودلی شو،چې دP نقطې مختصات ورته ویل کیږي. یا په بل عبارت که د مبدا څخه a واحده د x په محور،b واحده د y محور او وروسته c واحده د z محور سره موازي لاړ شي د (a,b,c) نقطه په لاس راځي ،(3) ش .



(3)ش

په عمومي توګه د$\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(x,y,z)/x,y,z\in\mathbb{R}\}$ درې تاییو سټ په لنډ ډول سره په $\mathbb{R}^3$ سره ښیو .

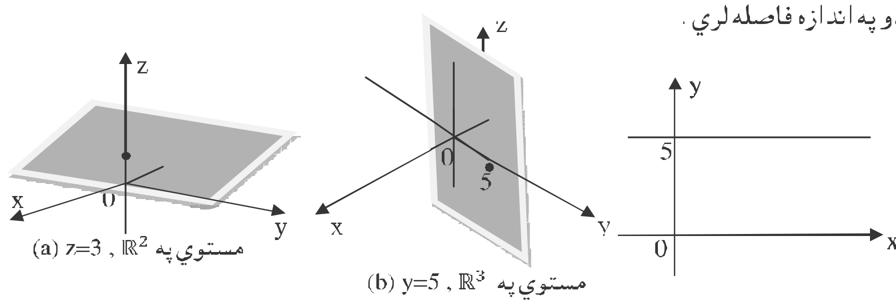
1. مثال کومه سطح په $\mathbb{R}^3$ کې د لاندینیو معادلو لرونکي ده .

(a) $z=3$ (b) $y=5$.

حل

(a) د $z=3$ معادله په $\mathbb{R}^3$ کې د $\{(x,y,z)/\ z=3\}$ سټ دی چې په هغه کې د z مختصه 3 ده. یعنې دا یوه افقي مستوي ده چې د $xy-$ مستوي سره موازي د 3 واحدو په فاصله پورته خواته پرته ده .

(b) د $y=5$ **معادله په** $\mathbb{R}^3$ کې د $\{(x,y,z)/\ y=5\}$ سټ دی ، چې په هغه کې د y **مختصه 5 ده. یعنې دا یوه عمودي مستوي راکوي چې د** $xy-$ **مستوي په ښی خوا کې په موازي ډول د** $xz-$ **مستوي سره د 5** واحدو په اندازه فاصله لري .



(a) $z=3$, $\mathbb{R}^2$ مستوي په

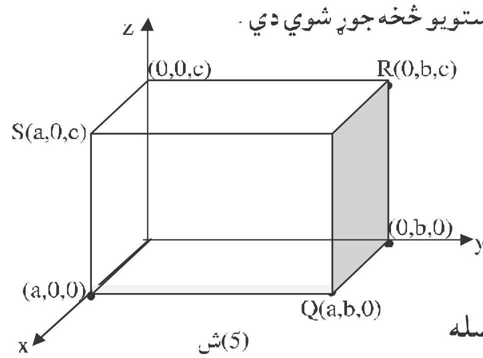
(b) $y=5$, $\mathbb{R}^3$ مستوي په

(c) $y=5$, $\mathbb{R}^2$ یو خط په

ش(4)

نوټ

کوم وخت چې یوه **معادله** راکړل شوي وي ،په دې باید پوه شو چې د **معادلې منحني په** $\mathbb{R}^2$ کې ده او که په $\mathbb{R}^3$ کې . **په پورتني مثال کې** $y=5$ یوه مستوي په $\mathbb{R}^3$ کې ده او د دوه بعده په صورت کې $y=5$ یو خط په $\mathbb{R}^2$ کې راکوي. **په عمومي توګه** $x=k$، $(k=const)$ یوه **موازي مستوي د** $yz-$ **مستوي ،** $y=k$ **موازي مستوي د** $xz-$ **مستوي او** $z=k$ **یوه موازي مستوي د** $xy-$ مستوي سره راکوي .همدا راز که د **مستطیل مکعب مخونه په نظر کې ونیسو دا د مختصاتو د درو مستویو** $x=0$ (yz- مستوي)، $y=0$، (xz- مستوي)، $z=0$، (xy- مستوي) او د $y=b$،$x=a$ او $z=c$ مستویو څخه جوړ شوي دي .



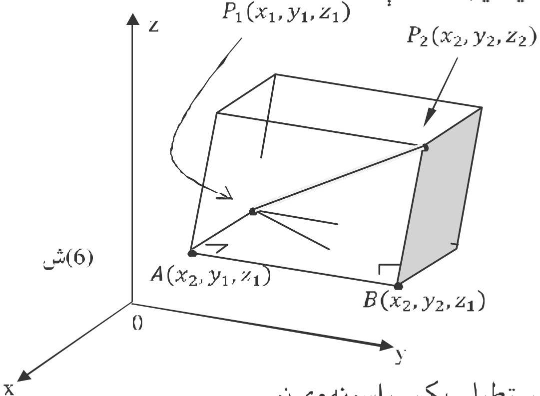
ش(5)

ii) په فضا کې د دوو نقطو تر منځ فاصله

که $P_1(x_1,y_1,z_1)$ او $P_2(x_2,y_2,z_2)$ د فضا دوې نقطې راکړل شوي وي ، ددوی تر منځ د **فاصلې فرمول** په لاندې ډول دی :

$$|P_1P_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}\quad .$$

ددې له پاره چې پوه شو چې ولې پورتنی فرمول سم دی یو مستطیل مکعب چې P_1او P_2 یې متقابل راسونه ، او مخونه یې د مختصاتو د مستویو سره موازي دي په نظر کې نیسو .(6)ش.



(6)ش

که چېرې $A(x_2, y_1, z_1)$ او $B(x_2, y_2, z_1)$ د مستطیلي بکس راسونه وي نو

$$|P_1A| = |x_2 - x_1| \;;\; |AB| = |y_2 - y_1| \;;\; |BP_2| = |z_2 - z_1|$$

کیږي .

دا چې P_1BP_2او P_1ABمثلثونه قایم الزازیه دي ، د فیثاغورث قضیې له مخې لیکو چې :

$$|P_1P_2|^2 = |P_1B|^2 + |BP_2|^2$$
$$|P_1B|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2$$
$$\Rightarrow |P_1P_2|^2 = |P_1A|^2 + |AB|^2 + |BP_2|^2$$
$$= |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + |z_2 - z_1|^2$$
$$\Rightarrow |P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

2. مثال

د $P(2,-1,7)$ او $Q(1,-3,5)$ دوو نقطو تر منځ فاصله پیدا کړی .

حل

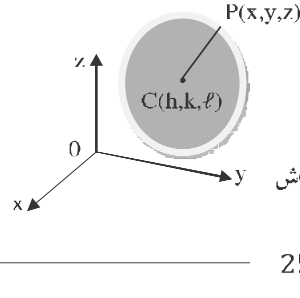
$$|PQ| = \sqrt{|1-2|^2 + |-3+1|^2 + |5-7|^2} = 3 \;.$$

3. مثال

که د کرې شعاع r او مرکز یې په $C(h,k,\ell)$کې وي معادله یې پیدا کړی .

حل

د کرې د تعریف له مخې ، یوه کره د ټولو هغو نقطو$P(x,y,z)$ سټ دی ،چې هغه د کرې د مرکزیعنې C څخه د r ثابته فاصله ولري .(7) ش



(7)ش

دا چې P د کرې یوه نقطه ده ، نو $|PC| = r$کیږي .لیکو چې :

$|PC|^2 = |x-h|^2 + |y-k|^2 + |z-\ell|^2$

او له دې څخه د کرې د معادلې له پاره لیکو چې:

$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-\ell)^2 = r^2$

4. مثال

وښیی چې$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$ د کرې معادله ده. مرکز او شعاع یې پیدا کړی .

حل

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z + 6 = 0$$
$$x^2 + 4x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 6 = 0$$
$$(x^2 + 4x + 4) - 4 + (y^2 - 6y + 9) - 9 + (z^2 + 2z + 1) - 1 + 6 = 0$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = -6 + 4 + 9 + 1$$
$$\Rightarrow (x+2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 8$$
$$\Rightarrow C(h,k,\ell) = (-2,3,-1);\ r = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}\ .$$

5. مثال

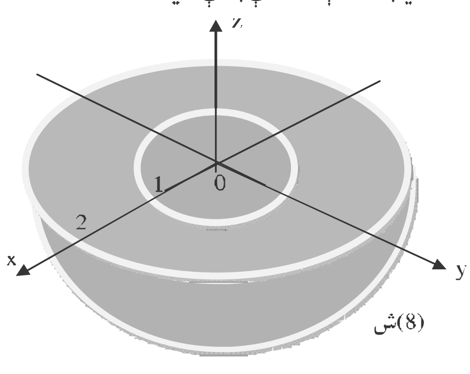
د $1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$; $(z \leq 0)$ غیر تساوي د کومو نقطو سټ دی ؟

حل

$$1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 4$$

$$\Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq 2$$

اخري غیر تساوي د هغو نقطو سټ دی چې د هغې کمترینه فاصله د مبدا څخه 1 او اعظمي فاصله یې د مبدا څخه 2 دی .دا چې $z \leq 0$ دی ، نو نقطې د xy− مستوي په لاندې خوا کې پرتې دي .په نتیجه کې وایو چې پورتنی غیر تساوي د هغو نقطو سټ دی چې د $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ او$x^2 + y^2 + z^2 = 4$ دوو کرو تر منځ او یا په دوی باندې له پاسه د xy− مستوي په لاندې خوا کې پرتې وي .(8) ش

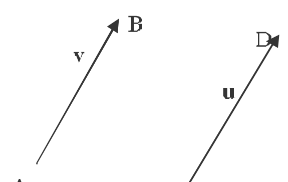


(8)ش

2. وکتورونه (Vectors)

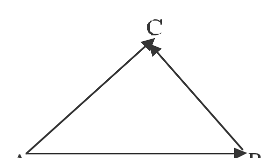
دا چې په انجينري کې اکثراً د وکتوري کميتونو(لکه سرعت،قوه، تعجيل همدا رنګه په فضا کې د سماوي جسمونو د حرکت د مسيراو ځينو نورو مسايلو سره ډېر زيات مخامخ کيږو. نو لازمه ده چې يو څه د وکتورونوپه مفهوم او کومې الجبري عمليې او ځنې خاص تعريفونه چې په وکتورپورې اړه لري د ضرورت په اندازه د ځينوخاصو مثالونو سره يو ځاى درته وړاندې کړو

د وکتور لفظ د ساينس پوهانو له خوا په هغو کميتونو کې چې د جهت او مقدار دواړو لرونکى وي استعماليږي. د مثال په توګه لکه قوه ، **تعجيل**، سرعت او ځنې نور. وکتور، په هندسي ډول معمولاً د يوه تير په واسطه يا د يوه جهت لرونکي خط په واسطه. داسې چې د تير اوږدوالى د وکتور مقدار او د تير جهت يې د وکتور په جهت پورې اړه لري يا په الجبري ډول دالفبا په کوچنيو تورو په تيز رنګ يعنې(boldface) او ياد الفبا په کوچنيو تورو چې دپاسه د وکتور علامه ورباندې ليکل شوي وي ښيو . د مثال په توګه فرضوو چې يوې کوچنى ذرې د يوه قطعه خط پر مخ د A څخه B نقطې ته حرکت کړى دى، د هغې دځاى نيونې(displacement-vec)وکتور يعنې (v) چې دپيل نقطه يې Aاو د پاى نقطه يېB ده ، $\mathbf{v}=\overrightarrow{AB}$ نوموو (9)) ش. دا هم د شکل له مخې معلوميږي چې د $\mathbf{u}=\overrightarrow{CD}$ وکتور اوږدوالى او جهت د **v** په شان دى او يوازې ځايونه يې بېل بېل دي . په دې صورت کې وايو چې **u** او **v** سره معادل يعنې سره مساوي (**u=v**) دي. هغه وکتور چې اوږدوالى يې صفر(**0**)وي صفري وکتور بولو، چې ټاکلى جهت نه لري او هغه په **0** سره ښيو .



(9) ش

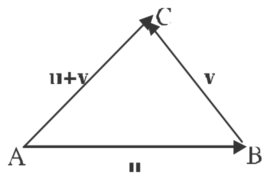
په دې هم بايد پوه شو چې وکتورونه د شکل له مخې څنګه سره ترکيب کولى شو. د مثال په توګه که يوه ذره د A څخه B نقطې ته حرکت وکړي، د هغې د ځاى نيونې وکتور $\overrightarrow{AB}$ دى او که وروسته له هغې بيا په بله خواد Bڅخه د C نقطې ته ورسيږي په دې ځاى کې د ځاى نيونې وکتور$\overrightarrow{BC}$ دى. په نتيجه کې د ذرې د ځاى نيونې وکتور د A څخه د C نقطې پورې د $\overrightarrow{AC}$ وکتور دى .دلته د $\overrightarrow{AC}$ وکتورته د $\overrightarrow{AB}$ او $\overrightarrow{BC}$ وکتورونو مجموعه(ترکيب) ويل کيږي .او داسې يې ليکو $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$. (10) ش



10)ش

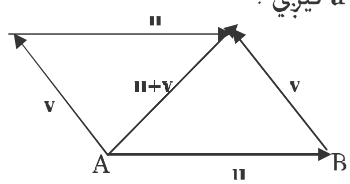
1.9 تعريف

که **u** او **v** داسې راکړل شوي وي ،چې د **v** وکتور پيل د **u** وکتور د پای نقطه وي، نو د **جمع حاصل** (**u+v**) يې يو وکتور دی چې پيل يې د **u** وکتور پيل او پای يې د **v** وکتور پای وي .د وکتورونو د جمع د تعريف هندسي شکل په لاندې شکل کې ليدلی شی او کله کله دې تعريف ته د مثلث قانون يا متوازی الاضلاع قانون هم ويل کيږي .



(11)ش

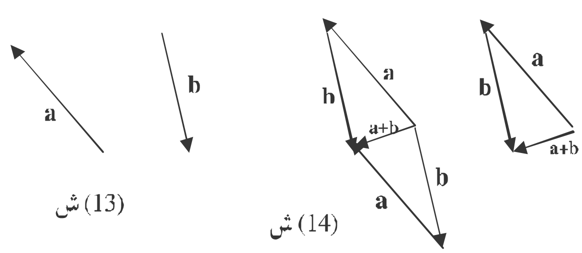
يعنې که د مثلث قانون له مخې **u** او **v** سره جمع کوو او دهغې دوې کاپی څنګ په څنګ سره کيږدو د متوازالاضلاع قانون (11) ش حاصليږي . يا په بل عبارت د **u** او **v** وکتورونه داسې برابروو چې دواړه د پيل شريکه نقطه ولري، نو دهغه د متوازی الاضلاع قطر چې د هغې ضلعې **u**او **v**وي د **u+v** څخه عبارت دی . د متوالاضلاع د قانون څخه پوهيږو چې **u+v = v+u** کيږي .



(12)ش

6. مثال

د(13)ش له مخې د **a**او **b** وکتورونه درکړل شوي دي او د جمع حاصل يې په (14) ش کې ليدلی شی، چې څنګه د مثلث د قانون او متوازی الاضلاع د قانون له مخې د **a+b** وکتور په لاس راغلی دی .



(13) ش

(14) ش

دا هم ممکنه ده چې د c يو سکالر د**v** په وکتور کې ضرب کړو . د مثال په توګه د **2v** وکتور د v+v سره برابر دی . يعنې داسې وکتور دی چې اوږدوالی يې د **v** دوه برابره او جهت يې د **v** په شان دی . پس په عمومي توګه سره موږ د يو سکالرضرب په يو وکتور کې په لاندې توګه تعريف کوو :

2.9 تعریف

که$c>0$ یو سکالر او **v**یو وکتور وي ، نو سکالري مضرب(c**v**) یو وکتور دی چې اوږدوالی یې د **v** وکتور c -څلې او جهت یې د **v** په شان دی . که $c<0$ وي په دې صورت کې یې جهت د **v** په متضاد جهت کې دی او د **v** د $|c|$ -څلې اوږدوالی لري . که $c=0$ یا**v**=0 وي نو c**v**=0 دی .

نتیجه

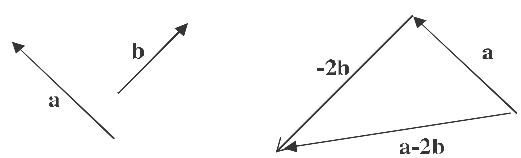
که چیرې د **u**او**v** دوه غیر صفري داسې وکتورونه وي، چې یو وکتورد بل وکتورد سکالري مضرب سره مساوي وي نو سره موازي دي. همدارنګه د وکتورونود تفاضل (**u** − **v**) لاس ته راوړلو له پاره د **u** سره −**v** جمع کوو . یعنې

u-**v** =**u**+(-**v**) .

7. مثال

که **a**او **b** دوه وکتورونه د(15)ش له مخې راکړل شوي وي ، **a**-2**b** رسم کړی .

حل اول د **a** وکتور رسموواو بیا د مثلث د قانون له مخې 2**b** − د **a** سره جمع کوو .(15) ش

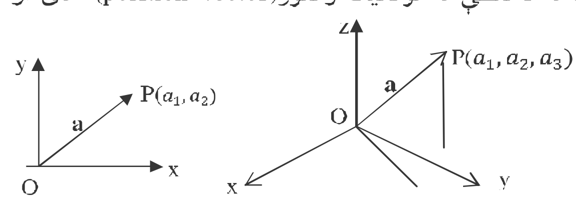


(15)ش

a) د وکتورونو الجبره

د مخه مو د قایمو مختصاتود درې بعده سیستم په اړه یو څه معلومات تر لاسه کړل او د ضرورت له مخې ځینې نور مفهومونه چې د وکتورونو په الجبره کې پکاریږي هم په نظر کې نیسو . که موږ د **a** وکتور پیل د قایمو مختصاتو سیستم په مبدا کې و لګوو ، نو د**a** وکتور د پای نقطې مختصه د قایمو مختصاتو په دوه بعده سیستم کې (a_1, a_2) او په درې بعده سیستم کې په (a_1, a_2, a_3) سره ښیواو د **a** له پاره**a**=$\langle a_1, a_2\rangle$یا په درې بعده کې **a**=$\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ لیکو. دلته د **a**=$\langle a_1, a_2\rangle$ لیکنه دا مفهوم لري چې د **a** وکتور د مرکبو په شکل لیکل شوی دی او(a_1, a_2) د یوې نقطې د مختصاتو مفهوم لري .د مثال په توګه **a**=$\overline{OP} = \langle 3,2\rangle$ د P نقطې د موقعیت وکتور(position vector) دی او P(3,2) دP نقطې مختصات دي .

(16) ش



نوټ

که د $A(x_1, y_1, z_1)$ او $B(x_2, y_2, z_2)$ دوې نقطې راکړل شوې وي ،د $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ وکتور د مرکبو په شکل په لاندې ډول لیکو :

$$\mathbf{a} = \langle x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1 \rangle \quad \ldots \quad (1)$$

8. مثال

هغه وکتور پیدا کړئ چې د هغې د پیل نقطې مختصه $A(2,-3,4)$ او د پای نقطې مختصه یې $B(-2,1,1)$ وي.

حل

د (1) رابطې له مخې $\mathbf{a}=\overrightarrow{AB}$ داسې لیکو :

$$\mathbf{a}=\overrightarrow{AB} = \langle -2-2, 1-(-3), 1-4 \rangle = \langle -4, 4, -3 \rangle \ .$$

دا هم درته وښودل شول چې په هندسي ډول دوه وکتورونه څنګه جمع کولی شو . اوس که وکتورونه د مرکبو له جنسه راکړل شوې وي، څنګه کولی شو چې په الجبري توګه د هغوی دجمع یا تفریق حاصل په لاس راوړو .ددې مطلب له پاره که $\mathbf{a}=\langle a_1, a_2 \rangle$ او $\mathbf{b} = \langle b_1, b_2 \rangle$ وي ،نو

$$\mathbf{a+b} = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2 \rangle = (a_1 + b_1)\mathbf{i} + (a_2 + b_2)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a - b} = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2 \rangle = (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j}$$

$$c\mathbf{a} = \langle ca_1, ca_2 \rangle = ca_1\,\mathbf{i} + ca_2\,\mathbf{j}$$

کیږي . دې ته ورته د درې بعده له پاره هم لیکو چې

$$\mathbf{a + b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle + \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3 \rangle$$

$$\mathbf{a - b} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle - \langle b_1, b_2, b_3 \rangle = \langle a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3 \rangle$$

$$= (a_1 - b_1)\mathbf{i} + (a_2 - b_2)\mathbf{j} + (a_3 - b_3)\mathbf{k}$$

نوټ

دلته $\mathbf{i}$,$\mathbf{j}$ او $\mathbf{k}$ په ترتیب سره د x , y او z محورونو په جهت واحد وکتورونه دي .

b) د وکتور اوږدوالی

د **a** وکتور اوږدوالی په |**a**| سره ښیو او د فاصلې د فرمول په استعمال سره د|**a**|= OP قطعه خط اوږدوالی((15)ش) د لاندې فرمول په واسطه معلومولی شو :

$$|\overrightarrow{OP}| = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

او د درې بعده په صورت کې $OP = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ کیږي.

c) سکالري او وکتوري کیمیتونه

i) سکالر (Scalars)

د حرارت، وخت اوتیزی کمیتونه چې یوازې مقدار ئې په نظر کې نیول کیږي .ټول سکالري کمیتونه دي .یعنې ټول عددونه دي ،او د ټولو الجبري عملیو قوانین او خاصیتونه پکې صدق کوي.

ii) وکتوري کمیتونه

تعجیل، مومنتم او سرعت چې جهت ئې هم په نظر کې نیول کیږي . ټول وکتوري کمیتونه دي ،چې پر مقدار برسېره جهت هم لري. وکتوري کمیتونه عموماً د وکتور پواسطه ارا ئه کیږي، داسې چې د وکتور اوږدوالی د وکتوري کمیت مقدار او د وکتور جهت د وکتوري کمیت جهت،همدارنګه د وکتور پیل د وکتوري کمیت پیل ، اوپای ئې د وکتوري کمیت د پای ځخه نمایندګي کوي، چې عموما د **a,b,c**,... تورو په روڼ شکل(**bold face**) او مقدار ئې په ترتیب سره په |**a**|,|**b**||**c**| ... سره ښیو . که چېرې**a ,b** ،**c** وکتورونه او κ یو سکالر وي لاندې قوانین صدق کوي :

1. تبدیلي قانون "**(commutative law)**"	**a+b = b+a**
2. اتحادي قانون "*(associative law)*"	$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c}$
3. توزیعي قانون"**distributive law**"	k(**a**+**b**) =k**a**+k**b**

d) سکالري ضرب (Scalar or D0t product)

تردې د مخه مو د دوو وکتورونو په جمع کولو او همدارنګه په وکتور کې د یوه سکالر د ضرب کولو په عملیو پورې ،اړوند معلومات تر لاسه کړل .پوښتنه په دې کې ده چې ځنګه کولی شو د دوو وکتورونو د ضرب حاصل ،چې یو له هغوی ځخه د وکتورونو سکالري ضرب دی په لاس راوړو،چې په لاندې ډول تعریف کیږي :

3.9 تعریف

که $\mathbf{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ او $\mathbf{b}=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$ وي ، د دوی سکالري ضرب د

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{b} \coloneqq \mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2 + \mathrm{a}_3\mathrm{b}_3 \ \ .$$

څخه عبارت دی.

د هندسې له نظره د **a** او **b** وکتورونو سکالري ضرب $(\mathbf{a}\cdot \mathbf{b})$ د **a** او **b** وکتورونو ترمنځ زاوئې(θ) په واسطه سره هم تعریف کولی شو او $0\le \theta \le \pi$ ده . دا هم زیاتوو چې که **a**او **b** موازي وکتورونه وي په دې صورت کې$\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ده.

4.9 تعریف

د **a** او**b** وکتورونو سکالري ضرب يو سکالر دی او داسې هم تعریف شوی دی:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = |\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta \ \ .$$

θ د a او b وکتورونو تر منځ کوچنی زاویه ده.

9.مثال

که $\mathbf{a}=\langle 2,4\rangle$ او $\mathbf{b}=\langle 3,-1\rangle$ وي نو

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{b} = \langle 2,4\rangle\cdot\langle 3,-1\rangle = 2\cdot 3 + 4\cdot(-1) = 6-4 = 2\,.$$

10. مثال

که $\mathbf{a}$=i+2j-3k او b=2j-k وي نو

$$\mathbf{a}\cdot \mathbf{b} = \langle 1,2,-3\rangle\cdot\langle 0,2,-1\rangle = 1\cdot 0 + 2\cdot 2 - 3\cdot(-1) = 4+3 = 7\,.$$

د وکتورونو په سکالري ضرب کې د حقیقي عددونو د ضرب اکثره خاصیتونه صدق کې او هغه د لاندې دعوې واسطه سره بیانوو:

1.9 دعوی

د **a** او **b** دوو وکتورونو سکالري ضرب په درې بعده فضا (V_3) کې د c یو سکالر دی، یعنې:

i) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$

ii) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

iii) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\boldsymbol{c}$

iv) $(c\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} = c(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(c\mathbf{b})$

$0 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (v

ثبوت

د وکتورونو د سکالري ضرب د تعریف له مخې په اسانی سره دعوی ثبوت کولی شو. د مثال په توګه د i) او iii) ثبوت په نظر کې نیسو .

(i $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \langle a_1, a_1, a_1 \rangle \cdot \langle a_1, a_2, a_3 \rangle = a_1^2 + a_2^2 + a_3^3 = |a|^2 .$

(iii $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \langle a_1, a_1, a_1, \rangle \cdot \langle b_1 + c_1, b_2 + c_2, b_3 + c_3 \rangle$

$= a_1(b_1 + c_1) + a_2(b_2 + c_2) + a_3(b_3 + c_3)$.

$= a_1b_1 + a_1c_1 + a_2b_2 + a_2c_2 + a_3b_3 + a_3c_3$

$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3$

$= \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$

د دعوی د نورو برخو ثبوت د تمرین په توګه پاتې شو . ■

11. مثال

که د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ وکتورونو اوږدوالی په ترتیب سره 4 او 6 او د دوی تر منځ زاویه $\frac{\pi}{3}$ وي $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ پیدا کړی .

حل

د 4.9 تعریف له مخې لیکو چې :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 12 \quad .$$

نتیجه

د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ وکتورونو تر منځ زاویه(θ) د 4.9 تعریف له مخې داسې پیدا کوو :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \quad ; \ (\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq 0)$$

همدارنګه دوو غیر صفري وکتورونو ته عمود یا اورتوګونال ویل کیږي ،که چېرې د دوي تر منځ زاویه $\theta = \frac{\pi}{2}$ وي ،نود 4.9 تعریف له مخې لیکو چې :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cdot \cos\frac{\pi}{2} = 0 \ .$$

یا ددې برعکس که $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ وي نو $\cos\theta=0$ دی یعنې $\theta=\frac{\pi}{2}$ کیږي. په نتیجه کې وایو چې د **a** او **b** وکتورونه اورتو گونال دي که چیرې او یوازې که چیرې $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ وي.

12. مثال

د $\mathbf{a}=\langle 2,2,-1\rangle$ او $\mathbf{b}=\langle 5,-3,2\rangle$ وکتورونو تر منځ زاویه پیدا کړی.

حل

ځرنگه چې:

$$|\mathbf{a}|=\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}=3$$
$$|\mathbf{b}|=\sqrt{5^2+(-3)^2+(2)^2}=\sqrt{38}$$
$$\Rightarrow \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}==2\cdot5+2\cdot(-3)+2\cdot(-1)=2$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}=\frac{2}{3\cdot\sqrt{38}}\ .$$
$$\Rightarrow \theta=\cos^{-1}\left(\frac{2}{3\cdot\sqrt{38}}\right)\cong 1.46\cong 84^{o}$$

13. مثال

وښئی چې د $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ وکتور د $5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ په وکتور باندې عمود (اورتو گونال) دی.

حل

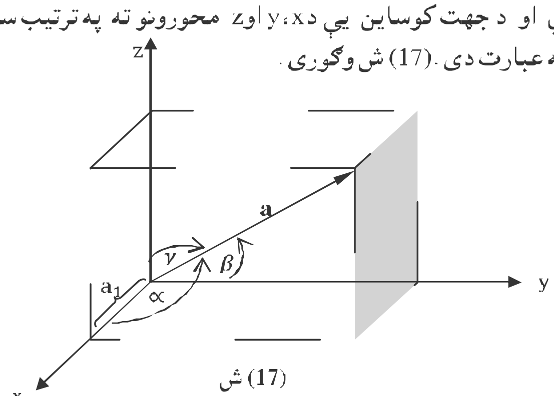
$$(2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k})\cdot(5\mathbf{i}-4\mathbf{j}+2\mathbf{k})=\mathbf{10}-\mathbf{8}-\mathbf{2}=\mathbf{0}$$

په نتیجه کې راکړل شوي وکتورونه سره عمود دي.

دا چې که $0\leq\theta<\frac{\pi}{2}$ وي نو $\cos\theta>0$، که $\frac{\pi}{2}<\theta\leq\pi$ وي $\cos\theta<0$ کیږي. نو $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ د $0<\theta\leq\frac{\pi}{2}$ له پاره مثبت او د $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ له پاره منفي دی. همدارنگه که $\theta=0$ وي د **a** او **b** وکتورونه سره همجهت او $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ کیږي. د عکس جهتونو په صورت کې $\theta=\pi$ او $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=-|\mathbf{a}||\mathbf{b}|$ سره دی.

د جهت زاویه او د جهت کوساین

د $\mathbf{a}\neq0$ وکتور د جهت زاویې $\propto,\beta$ او γ د $[0,\pi]$ په انترول کې هغه زاویې دي چې د **a** وکتور ئې د x، y او z محورونو سره جوړوي او د جهت کوساین یې د x، y او z محورونو ته په ترتیب سره د جهت زاویو د $\cos\propto$، $\cos\beta$ او $\cos\gamma$ څخه عبارت دی. (17) ش وگوری.



(17) ش

د مثال په توگه د a وکتور د جهت کوساین د x محور ته د

$$\cos\propto = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}}{|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{i}|} = \frac{a_1}{|\mathbf{a}|} \qquad (2)$$

څخه عبارت دی، چې د (17) ش له مخې په ځرگنده توگه لیدل کیږي.

په همدې ترتیب په لاس راځي چې:

$$\cos\beta = \frac{a_2}{|\mathbf{a}|} \qquad (3)$$

$$\cos\gamma == \frac{a_3}{|\mathbf{a}|} \qquad (4)$$

د (2) ، (3) او (4) د اطرافو د مربع ، د جمع حاصل څخه په لاس راځي چې:

$$\cos^2\propto + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{a_1^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_2^2}{|\mathbf{a}|^2} + \frac{a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = \frac{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}{|\mathbf{a}|^2} = 1$$

$$\Rightarrow \cos^2\propto + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5)$$

همدارنگه د (2) ،(3) او (4) رابطوله مخې لروچې:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\langle\cos\propto, \cos\beta, \cos\gamma\rangle\langle a_1, a_2, a_3\rangle = \langle|\mathbf{a}|\cos\propto, |\mathbf{a}|\cos\beta, |\mathbf{a}|\cos\gamma\rangle$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle\cos\propto, \cos\beta, \cos\gamma\rangle \qquad (6)$$

5.9 تعریف (واحد وکتور)

یو وکتور چې اوږدوالی یې، د اوږدوالي یو واحد وي ،د واحد وکتور په نوم یادیږي .د مثال په توگه $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ او $\mathbf{k}$ واحد وکتورونه دي چې په ترتیب سره د x ، y او z محورونو جهتونه لري. په عمومي توگه سره که $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ وي نو $c := \frac{1}{|\mathbf{a}|}$ وي واحد وکتور یې $\frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|}$ د ی چې د $\mathbf{a}$ جهت لري .دلته که $\mathbf{u} = c\cdot\mathbf{a}$ واحد وکتوردی چې د $\mathbf{a}$ جهت لري .ځکه چې c یو مثبت سکالر دی او لیکو چې:

$$|\mathbf{u}| = |c\mathbf{a}| = |c||\mathbf{a}| = \frac{1}{|\mathbf{a}|}|\mathbf{a}| = 1$$

د (6) رابطې څخه معلومیږي چې د واحد وکتور له پاره لاندینی رابطه هم صدق کوی:

$$\mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}\mathbf{a} = \langle\cos\propto, \cos\beta, \cos\gamma\rangle \qquad (7)$$

14. مثال

د $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\boldsymbol{k}$ له پاره واحد وکتور پیدا کړی.

حل

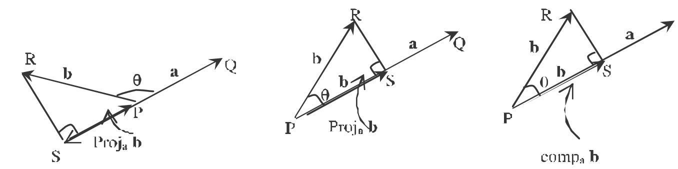
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$\Rightarrow \mathbf{u} = \frac{1}{|\mathbf{a}|}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{1}{3}(2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}) = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

او

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(\tfrac{2}{3})^2 + (\tfrac{1}{3})^2 + (\tfrac{2}{3})^2} = \sqrt{\tfrac{4}{9} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{4}{9}} = 1.$$

په (18) ش کې د $\overrightarrow{PQ}$ او $\overrightarrow{PR}$ وکتورونه په نظر کې نیسوچې د دواړو د پیل نقطه P ده ، چې په ترتیب سره د **a** او **b** وکتورونه رانښيي . S د هغې عمود د تقاطع نقطه ده چې د R څخه په $\overrightarrow{PQ}$ رسم شوی دی .دلته د $\overrightarrow{PS}$ ته د **b** وکتور ، وکتوري مرتسم په **a** باندې (د **a** په جهت) ویل کیږي چې په $proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b}$ سره ئې ښیو .



(18) ش

د **b** وکتور سکالري مرتسم په **a** باندې، د وکتوري مرتسم د الجبري مقدار یعنې د $|\mathbf{b}|cos\theta$ څخه عبارت دی او په $\mathbf{comp_a b}$ سره ئې ښیو .دلته د **a** او **b** وکتورونو تر منځ زاویهθ ده، که چېرې $0 < \theta < \pi$ وي نو

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos\theta = |\mathbf{a}|(|\mathbf{b}| \cdot \cos\theta) \ .$$

.او له دې ځایه لیکو چې :

$$|\mathbf{b}| \cdot \cos\theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} \cdot \mathbf{b}$$

په نتیجه کې

$$\Rightarrow \text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}$$

او د **b** وکتوري مرتسم د **a** په جهت باندې په لاندې ډول دی .

$$proj_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a}$$

15. مثال

د $\mathbf{b}=\langle 1,1,2\rangle$ وکتوری او سکالري مرتسمونه د $\mathbf{a}=\langle -2,3,1\rangle$ په جهت پیدا کړی .

حل

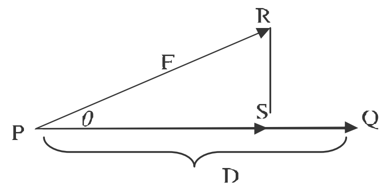
$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4 + 9 + 1} = \sqrt{14}$$
$$\text{comp}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{-2+3+2}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}}$$
$$\text{proj}_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|}\right) \cdot \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a} = \frac{3}{\sqrt{14}} \cdot \frac{\mathbf{a}}{\sqrt{14}} = \frac{3}{14}\mathbf{a} = \langle -\frac{3}{7}, \frac{9}{14}, \frac{3}{14}\rangle \ .$$

وکتوري مرتسم چې په فزیک او انجینري کې ډېر د استعمال ځایونه لري اویو د هغې څخه یې په فزیک کې د کار محاسبه ده .

پو هیږوچې کار د $W=F \cdot d$ الجبري افادې په واسطه په هغه صورت کې محاسبه کولی شو ، چې د قوې او د جسم په واسط د طی شوي فاصلې جهتونه سره یو شان وي .که دقوې او جسم له خوا د طی شوي فاصلې جهتونه سره یو شان نه وي، یعنې په خپل منځ کې د $0 \neq \theta$ زاویه سره جوړه کړي ، په دې صورت کې د کار مقدار

$$W=|\mathbf{F}|cos\theta \cdot |\mathbf{D}|$$

دی او $|D|$ د جسم له خوا د طی شوي فاصلې مقدار دی .

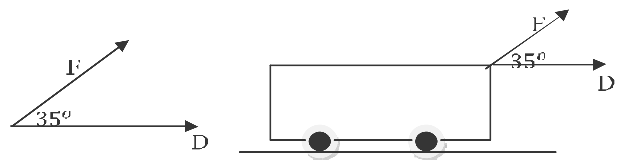


ش (19)

$$\Rightarrow \mathbf{W} = (|\mathbf{F}| \cdot |\mathbf{D}| cos\theta) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{D}$$

16. مثال

که یوه کراچی د F=75N قوې په واسطه د افقي خط په امتداد 100 m فاصله طی کړي . د قوې په واسطه د اجرا شوي کار مقدار په هغه صورت کې پیدا کړی چې د کراچی دلاستي اوافقي خط تر منځ زاویه 35^o وي .



ش (20)

حل

که **F** او **D** د قوې او جسم د ځای نیونې وکتورونه وي ، نو:

$$W = |F| \cdot |D| \cos 35^o = 75 \cdot 100 \cdot \cos 35^o \cong 5734 N \cdot m = 5734\ \mathbf{J}$$

17. مثال

یو جسم د F=3i+4j+5k قوې په واسطه د P(2,1,0) نقطې څخه Q(4,6,2) نقطې ته حرکت کړی دی . د اجرا شوي کارمقدار معلوم کړی .

حل

د جسم له خوا د ځای نیونې وکتور $D=\overrightarrow{PQ}=\langle 2,5,2\rangle$ دی او

$$W=F\cdot D = \langle 3,4,5\rangle \cdot \langle 2,5,2\rangle = 6 + 20 + 10 = 36$$

که د اوږدوالي واحد په متر او قوه په نیوټن اندازه شوي وي نو د کار اندازه به 36 J وي .

18. مثال

د $\mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ وکتور , سکالري او وکتوري مرتسمونه د $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ په جهت پیدا کړی

حل

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{(-2)^2 + (3)^2 + 1^2} = \sqrt{14}$$

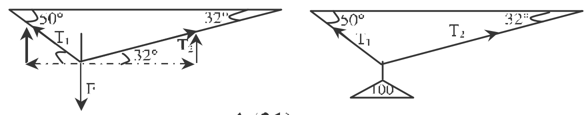
$$\Rightarrow comp_{\mathbf{a}}\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|} = \frac{(-2)(1)+(3)(1)+(1)(2)}{\sqrt{14}} = \frac{3}{\sqrt{14}} .$$

$$proj_{a^b} = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}|^2} \cdot \mathbf{a} = \frac{3}{|\mathbf{a}|^2}\mathbf{a} = \frac{3}{14}(-2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$
$$= \left(-\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{9}{14}\mathbf{j} + \frac{3}{14}\mathbf{k}\right)$$

19. مثال

یوجسم چې 100kg کتله لري ، د دوو تارونو په واسطه د (21) ش له مخې ځوړند شوی دی .د تارونو د د کشش قوې یعنې T_1 او T_2 او د هغوی مقدار په تا رونو کې پیدا کړی .

حل



(21) ش

T_1 او T_2 په خپلوافقي او عمودي مرکبو بدلوو.

$$\mathbf{T_1} = -|\mathbf{T_1}|\cos 50^o \mathbf{i} + |\mathbf{T_1}|\sin 50^o \mathbf{j} \quad \ldots \qquad (8)$$
$$\mathbf{T_2} = |\mathbf{T_2}|\cos 32^o \mathbf{i} + |\mathbf{T_2}|\sin 32^o \mathbf{j} \quad \ldots \qquad (9)$$

دلته د ځمکې جاذبې قوه په جسم باندې $\mathbf{F} = -100(9.8)\mathbf{j} = -980\,\mathbf{j}$ ده، چې د $T_1 + T_2$ په واسطه د تعادل په حالت کې ساتل کیږي . یعنې

$$\mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} = -\mathbf{F} = 980\mathbf{j}$$
$$\Rightarrow \mathbf{T_1} + \mathbf{T_2} = -|\mathbf{T_1}|\cos 50^o \boldsymbol{i} + |T_1|\sin 50^o \mathbf{j} + |T_2|\cos 32^o \mathbf{i} + +|T_2|\sin 32^o \mathbf{j}$$
$$=(-|\mathbf{T_1}|\cos 50^o + |\mathbf{T_2}|\cos 32^o)\mathbf{i} + (\ |\mathbf{T_1}|\sin 50^o + |\mathbf{T_2}|\sin 32^o)\mathbf{j} = 980\mathbf{j}$$

$$\Rightarrow -|\mathbf{T_1}|\cos 50^o + |\mathbf{T_2}|\cos 32^o) = 0 \quad \ldots \qquad (10)$$

$$|\mathbf{T_1}|\sin 50^o + |\mathbf{T_2}|\sin 32^o = 980 \quad \ldots \qquad (11)$$

$$\overset{(10)}{\Longrightarrow} |\mathbf{T_2}| = \frac{|T_1|\cos 50^o}{\cos 32^o}$$

د $|\mathbf{T_2}|$ دغه قیمت په (11) کې ږدو لیکو چې :

$$|\mathbf{T_1}|\sin 50^o + \frac{|\mathbf{T_1}|\cos 50^o}{\cos 32^o} \cdot \sin 32^o = 980$$
$$\Rightarrow |\mathbf{T_1}| = \frac{980}{\sin 50^o + \tan 32^o \cdot \cos 50^o} \approx 839\ \mathrm{N}$$
$$|\mathbf{T_2}| \approx \frac{|T_1|\cos 50^o}{\cos 32^o} \approx 636\ \mathbf{N}$$
$$\overset{(8)(9)}{\Longrightarrow} \mathbf{T_1} \approx -539\mathbf{i} + 643\mathbf{j}$$
$$\mathbf{T_2} \approx 539\mathbf{i} + 337$$

3. وکتوري ضرب (Cross Product)

a او **b** وکتورونو د وکتوري ضرب $(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$ حاصل یو وکتور دی ، نو ځکه وکتوري ضرب ورته ویل کیږي .او داسې یې تعریف کوو .

6.9 تعریف

که $\mathbf{a}=\langle a_1, a_2, a_3\rangle$ او $\mathbf{b}=\langle b_1, b_2, b_3\rangle$ وي ، نو د **a** او **b** وکتوري ضرب د

$$\mathbf{a}\times \mathbf{b} = \langle a_2b_3 - a_3b_2, a_3b_1 - a_1b_3, a_1b_2 - a_2b_1\rangle \quad .... \qquad (12)$$

وکتور څخه عبارت دی .

پورتنی تعریف لږ څه عجیب معلومیږي ، او دا چې د پورتني تعریف دا خاص شکل ډېر د استعمال ځایونه لري نو څکه په دې ځای کې دې شکل ته د تاسو پاملرنه را اړوو. ددې له پاره چې په پورتني تعریف کې اسانتیا را منځ ته شي، موږ د دوهمې مرتبې دیترمینانت د لاندې افادې په واسطه تعریف کوو:

7.9 تعریف

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$$

د مثال په توګه :

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 4 - 1(-6) = 14 \quad .$$

او د دریمې مرتبې دیتر مینانت د دوهمې مرتبې د دیترمینانت له مخې داسې لیکو:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2\begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

د مثال په توګه :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=1(0-4)-2(6+5)+(-1)(12-0)= -38 \quad .$$

اوس که د دوهم ځل له پاره 9 .7 تعریف د دوهمې مرتبې د دیترمینانت او د **i**,**j** او **k** اساسي وکتورونو له جنسه ولیکو، نو د $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ او $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ وکتوري ضرب ($\mathbf{a}\times \mathbf{b}$) په لاندې ډول لیکلی شو چې:

$$\mathbf{a}\times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}\mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\mathbf{k}$$

20. مثال

که $\mathbf{a}=\langle 1,3,4\rangle$ او $\mathbf{b}=\langle 2,7,-5\rangle$ وي نو

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\1&3&4\\2&7&-5\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&4\\7&-5\end{vmatrix}\mathbf{i}-\begin{vmatrix}1&4\\2&-5\end{vmatrix}\mathbf{j}+\begin{vmatrix}1&3\\2&7\end{vmatrix}\mathbf{k}$$

$=(-15-28)\mathbf{i}-(-5-8)\mathbf{j}+(7-6)\mathbf{k}=\ -43\mathbf{i}+13\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

21. مثال

وښيي چې د هر دريېبعده وکتور **a** له پاره $\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\mathbf{0}$ صدق کوي .

حل که $\mathbf{a}=\langle a_1,a_2,a_3\rangle$ وي نو:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\a_1&a_2&a_3\\a_1&a_2&a_3\end{vmatrix}$$

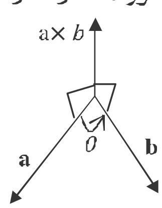
$$=(a_2a_3-a_3a_2)\mathbf{i}-(a_3a_1-a_3a_2)\mathbf{j}+(a_1a_2-a_2a_1)\mathbf{k}$$

$$=0\,\mathbf{i}-0\mathbf{j}+0\,\mathbf{k}=\mathbf{0}$$

همدارنګه د وکتوري ضرب يو له مهمو خاصيتونو څخه د دعوې په شکل په لاندې توګه بيانوو :

2.9 دعوی

د $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وکتور د **a** او **b** په وکتورونو عمود دی .يعنې د $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وکتور د **a** او **b** وکتورونو په مستوي عمود دی . چې جهت يې د ښي لاس د قانون له مخې ټاکل کيږي .



(22) ش

ثبوت

ښيو چې $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ په **a** باندې عمود دی .ليکو چې :

$$(\mathbf{a}\times\ \mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\begin{vmatrix}a_2&a_3\\b_2&b_3\end{vmatrix}a_1-\begin{vmatrix}a_1&a_3\\b_1&b_3\end{vmatrix}a_2+\begin{vmatrix}a_1&a_2\\b_1&b_2\end{vmatrix}a_3$$

$$=a_1(a_2b_3-a_3b_2)-a_2(a_1b_3-a_3b_1)+a_3(a_1b_2-a_2b_1)$$

$$=a_1a_2b_3-a_1b_2a_3-a_1a_2b_3+b_1a_2a_3+a_1b_2a_3-b_1a_2a_3=0\ \blacksquare$$

دې پورته په شان ښودلی شو چې $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ په $\mathbf{b}$ باندې هم عمود دی . په نتیجه کې $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ په $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ دواړو باندې د اورتوګونال (عمود) خاصیت لري .دا چې $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ یو وکتور دی دجهت او اوږدوالي :دواړو لرونکی دی چې جهت یې د ښي لاس(RHS) د قانون له مخې او اوږدوالی یې د لاندې دعوې په واسطه ټاکلی کیږي

3.9 دعوی

که θ د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ تر منځ زاویه $(0\leq \theta \leq \pi)$ وي نود $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وکتور اوږدوالی

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin\theta$$

کیږي .

ثبوت

د وکتوري ضرب او د وکتور اوږدوالي د تعریفونو له مخې لرو چې :

$$|\mathbf{a}\times\mathbf{b}\,|^2 = (\mathrm{a}_2\mathrm{b}_3 - \mathrm{a}_3\mathrm{b}_2)^2 + (\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1 - \mathrm{a}_1\mathrm{b}_3)^2 + (\mathrm{a}_1\mathrm{b}_2 - \mathrm{a}_2\mathrm{b}_1)^2$$

$$=\mathrm{a}_2^2\mathrm{b}_3^2 - 2\mathrm{a}_2\mathrm{a}_3\mathrm{b}_2\mathrm{b}_3 + \mathrm{a}_3^2\mathrm{b}_2^2 + \mathrm{a}_3^2\mathrm{b}_1^2 - 2\mathrm{a}_1\mathrm{a}_3\mathrm{b}_1\mathrm{b}_3 + \mathrm{a}_1^2\mathrm{b}_3^2 + \mathrm{a}_1^2\mathrm{b}_2^2 -$$

$$-2\mathrm{a}_1\mathrm{a}_2\mathrm{b}_1\mathrm{b}_2 + \mathrm{a}_2^2\mathrm{b}_1^2$$

$$=(\mathrm{a}_1^2 + \mathrm{a}_2^2 + \mathrm{a}_3^2)(\mathrm{b}_1^2 + \mathrm{b}_2^2 + \mathrm{b}_3^2) - (\mathrm{a}_1\mathrm{b}_1 + \mathrm{a}_2\mathrm{b}_2 + \mathrm{a}_3\mathrm{b}_3)^2$$

$$=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2$$

$$=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2cos^2\theta$$

$$=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2(1 - cos^2\theta)$$

$$=|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2\sin^2\theta$$

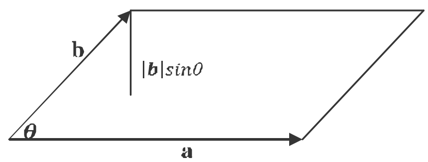
$$\Rightarrow |\mathbf{a}\times\mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|sin\theta \qquad ; \qquad (sin\theta \geq 0 \ ,; \ 0\leq \theta \leq \pi) \qquad \blacksquare$$

نتیجه

د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ د صفر خلاف وکتورونه سره موازي($\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$) دي که $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$ وي. ځکه چې د دوی تر منځ زاویه $\theta = 0$ کیږي .

د پورتني دعوې هندسي مفهوم

د لاندې شکل له مخې که $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ دوه موجه خطونه چې مشترکه نقطه لري راکړل شوي وي ، په دې صورت کې په دوی پورې د اړوند متوازالاضلاع د قاعدې اوږدوالی$|\mathbf{a}|$ او لوړوالی یې $|\mathbf{b}|sin\theta$ کیږي .نو د متوازی الاضلاع مساحت $A=|\mathbf{a}|(|\mathbf{b}|sin\theta) = |\mathbf{a}\times\mathbf{b}|$ دی



ش (23)

یعنې د$\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ وکتور اوږدوالی د هغې متوازی الاضلاع د مساحت سره برابر دی چې د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}$ په واسطه جوړیږي .

22. مثال

یوه مستوي د P(1,4,6), Q(-2,5,-1) او R(1,-1,1) نقطو څخه تېرېږي هغه وکتور پیدا کړی چې په راکړل شوي مستوي باندې عمود وي .

حل

پوهیږو چې د$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}$ وکتور په $\overrightarrow{PQ}$ او$\overrightarrow{PR}$ دواړو عمود دی . نو له دې وجهې څخه په هغه مستوي چې د Q,P او R نقطو څخه تېرېږي هم عمود دی .او د عمود د پیدا کولو له پاره لیکو چې :

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}} = (-2-1)\mathbf{i} + (5-4)\mathbf{j} + (-1-6)\mathbf{k} = -3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PR}} = (1-1)\mathbf{i} + (-1-4)\mathbf{j} + (1-6)\mathbf{k} = -5\mathbf{j} - 5\mathbf{k}.$$

$$\overrightarrow{\mathbf{PQ}}\times\overrightarrow{\mathbf{PR}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & 1 & -7 \\ 0 & -5 & -5 \end{vmatrix} = (-5-35)\mathbf{i}-(15-0)\mathbf{j}+(15-0)\mathbf{k} = -40\mathbf{i} -15\mathbf{j}+15\mathbf{k}\ .$$

په نتیجه کې د $\langle -40,-15,15\rangle$ وکتور په راکړل شوي مستوي عمود دی . دا هم زیاتوو چې د دې وکتور هر سکالري مضرب لکه$\langle -8,-3,3\rangle$ هم په دې مستوي باندې عمود دی .

23. مثال

P(1,4,6), Q(-2,5,-1) او R(1,-1,1) د مثلث درې راسونه دي، د مثلث مساحت پیدا کړی

حل

څرنګه چې د پورتني مثال له مخې$\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} = \langle -40, -15, 15\rangle$ کیږي، نو

$$\left|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}\right| = \sqrt{(-40)^2 + (-15)^2 + 15^2} = 5\sqrt{82}$$

او د مثلث مساحت چې د متوازيالاضلاع د نیمایۍ سره برابر دی $\frac{5}{2}\sqrt{82}$ کیږي .

که چیرې مونږ 6.8 تعریف په نظر کې ونیسو ، د **j,i** او **k** وکتورونو ،د وکتوري ضرب حاصل، چې په ترتیب سره د y,x او z وکتورونو جهتونه لري په لاندې ډول دی :

$$\mathbf{i}\times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{j}\times \mathbf{k} = \mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{k}\times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

$$\mathbf{j}\times \mathbf{i} = -\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{k}\times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{i}\times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

دلته په ښکاره معلومیږي چې په وکتوري ضرب کې تبدیلي قانون صدق نه کوي ،ځکه چې$\mathbf{i}\times \mathbf{j} \neq \mathbf{j}\times \mathbf{i}$ کیږي .همدارنګه اتحادي قانون هم په وکتوري ضرب کې صدق نه کوي، ځکه چې

$$\mathbf{i}\times (\mathbf{i}\times \mathbf{j}) = \mathbf{i}\times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$$

$$(\mathbf{i}\times \mathbf{i})\times \mathbf{j} = \mathbf{0}\times \mathbf{j} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{i}\times (\mathbf{i}\times \mathbf{j}) \neq (\mathbf{i}\times \mathbf{i})\times \mathbf{j}$$

بیا هم ځنې خاصیتونه شته چې په وکتوري ضرب کې تل صدق کوي او هغه د لاندې دعوې په واسطه سره بیانوو :

4.9 دعوی

که چیرې**b,a** او **c** وکتورونه اوk یوسکالر وي . نولاندې خاصیتونه صدق کوي .

1. $\mathbf{a}\times \mathbf{b} = -\mathbf{b}\times \mathbf{a}$
2. $(k\mathbf{a})\times \mathbf{b} = k(\mathbf{a}\times \mathbf{b}) = \mathbf{a}\times (k\mathbf{b})$
3. $\mathbf{a}\times (\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times \mathbf{b} + \mathbf{a}\times \mathbf{c}$
4. $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times \mathbf{c} = \mathbf{a}\times \mathbf{c} + \mathbf{b}\times \mathbf{c})$
5. $\mathbf{a}\cdot (\mathbf{b}\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\times \mathbf{b})\cdot \mathbf{c}$
6. $\mathbf{a}\times (\mathbf{b}\times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}\cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a}\cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$

پورتني خاصيتونه د وکتوري ضرب د تعريف له مخې، په هغه صورت کې چې وکتورونه د هغوی د مرکبو له جنسه په نظر کې ونيول شي ، په اسانی سره ثبوت کيدلی شي . موږ دلته يوازې (5) خاصيت ثبوت کوو.

د(5) ثبوت

که $\langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $\mathbf{a} =$ $\langle b_1, b_2, b_3 \rangle$=b/و $\mathbf{c} = \langle c_1, c_2, c_3 \rangle$ وي ، نو :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

$$= a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1$$

$$= (a_2b_3 - a_3b_2)c_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)c_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)c_3$$

$$= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c} \quad \blacksquare$$

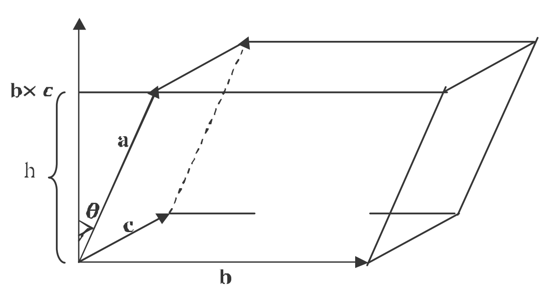
4. درې ګونی ضرب (Triple product)

د پورتنی دعوې (5) خاصيت$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ ته ، د b,a او c وکتورونو سکالري درې ګونی ضرب هم ويل کيږي چې قيمت يې د ديترمينانت په شکل په لاس راځي او د (5) خاصيت دقيمت سره سره مساوي دی . يعنې

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

کيږي .

د پورتني ضرب دهندسي مفهوم په اړه ،يو متوازی السطوح چې د b,a او c وکتورونو څخه جوړ شوی دی په نظر کې نيسو (24) ش .



ش (24)

د شکل له مخې د قاعدې د سطحې مساحت $A=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|$ ، د $\mathbf{a}$ او $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ وکتورونو تر منځ زاویه θ ده او د متوازی السطوح لوړوالی $h=|\mathbf{a}|\cdot cos\theta$ کیږي .او د $\frac{\pi}{2}<0$ په صورت کې د $\cos\theta$ په عوض د $|cos\theta|$ څخه کار اخیستل کیږي . نو له دې وجې څخه د متوازی السطوح حجم

$$V=A\cdot h=|\mathbf{b}\times\mathbf{c}|\cdot|\mathbf{a}||cos\theta|=|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})| \qquad ...(13)$$

په لاس راځي .

که په پورتني فرمول کې د متوازی السطوح حجم$|\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})|=0$ شي پدې صورت کې د $\mathbf{b},\mathbf{a}$ او $\mathbf{c}$ وکتورونه حتماً باید په یوه مستوي کې پراته وي او وایو چې د $\mathbf{b},\mathbf{a}$او $\mathbf{c}$ وکتورونه هم مستوي (coplanar) دی .

24. مثال

وښئی چې د $\mathbf{a}=\langle 1,4,-7\rangle$ ، $\mathbf{b}=\langle 2,-1,4\rangle$ او $\mathbf{c}=\langle 0,-9,18\rangle$ وکتورونه هم مستوي دي .

حل د (13) معادلې له مخې لیکو چې :

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix}1 & 4 & -7\\ 2 & -1 & 4\\ 0 & -9 & 18\end{vmatrix}=1\begin{vmatrix}-1 & 4\\ -9 & 18\end{vmatrix}-4\begin{vmatrix}2 & 4\\ 0 & 18\end{vmatrix}-7\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -9\end{vmatrix}$$

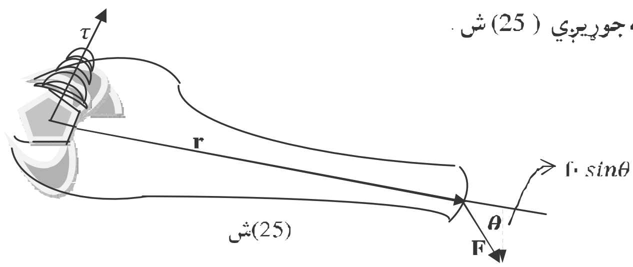
$$=1(18)-4(36)-7(-18)=0$$

دلته په $\mathbf{b},\mathbf{a}$ او $\mathbf{c}$ پورې د اړوند متوازي السطوح حجم مساوي په صفر دی نو $\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}$ درې واړه وکتورونه هم مستوي دي .

5. تورک (Torque)

د وکتوري ضرب مفهوم سره معمولاً په فزیک او خاصتاً په داسې مسایلو کې لکه د F قوه چې د موقعیت وکتورئې r دی په یوه جسم عمل کوي، ډېر زیات مخامخ کیږو . د مثال په توګه د رېنچ (wrench) په واسطه د ناټ د محکم کولو په صورت کې یوه دوراني قوه په کار اچول کیږي .تورک چې د مبدا سره اړیکه لري ، د قوې دموقعیت وکتور ($\mathbf{r}$)او د قوې د وکتوري ضرب څخه عبارت دی. یعنې $\boldsymbol{\tau}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$چې د جسم د دوران اندازه په مبدا باندې راښیي او د دوراني محور جهت لري . مقدار یې $|\boldsymbol{\tau}|=|\mathbf{r}\times\mathbf{F}|=|r||F|sin\theta$ دی او θ هغه زاویه ده چې د $\mathbf{r}$ او$\mathbf{F}$ تر منځ تشکیلیږي .دلته په ښکاره معلومیږي چې یوازې د $\mathbf{F}$ قوه د $|\mathbf{F}|\cdot sin\theta$ مقدار په لرلوسره چې عموداً په r باندې عمل د جسم

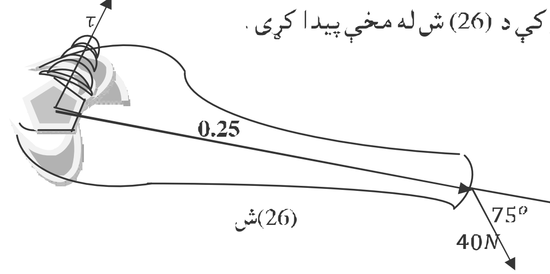
د دوران سبب ګرځي . دا هم زیاتوو چې د تورک مقدار د هغې متوازي‌الاضلاع د مساحت سره برابر دی چې د r او F په واسطه جوړیږي (25) ش .



ش(25)

25. مثال

یو ناټ د یو رېنچ په واسطه چې 0.25 m اوږدوالی لري د 40 N قوې په کارولو سره محکم کیږي . د تورک مقدار د ناټ په مرکز کې د (26) ش له مخې پیدا کړی .



ش(26)

حل

د تورک وکتور مقدار د

$$|\boldsymbol{\tau}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{F}| = |\boldsymbol{r}||\boldsymbol{F}|sin\theta = 0.25 \cdot 40 \cdot sin75^o = 10 \cdot sin75^o \approx 9.66 \cdot N$$

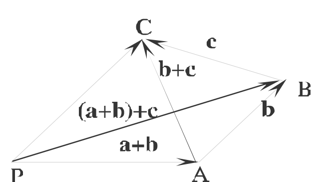
څخه عبارت دی .او په خپله د تورک وکتور $\boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}| \cdot \mathbf{n} \cong 9.66n$ کیږي . دلته **n** واحد وکتور دی چې جهت یې د دې صفحې ښکته خواته، یعنې د تورک وکتور جهت لري .

6. حل شوي مسئلې

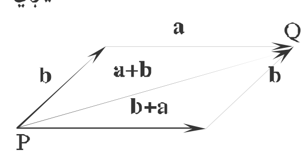
1. ثبوت کوو چې $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ کیږي.

حل

د $(\mathbf{26_a})$ ش له مخې $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overrightarrow{\boldsymbol{PQ}} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ کیږي .



ش$(\mathbf{27_a})$



ش$(\mathbf{27_b})$

2. ثبوت کوو چې $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$ کیږي

حل

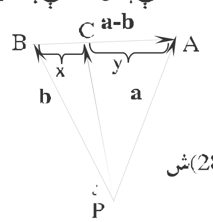
د (27_b) ش له مخې

$\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AC}$

$= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \;=\; \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

$\Rightarrow (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} \;=\; \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$.

3. که چېرې **b, a** او **c** داسې راکړل شوي وي چې **P** نقطې څخه تېر او د هغې پای نقطې په یوه معلوم وکتور $\overline{BA}$ باندې پراتې وي. (27) ش



ش(28)

نو که د C نقطه د BA وکتور د x:y په نسبت داسې وویشي چې x+y=1 صدق وکړي. معلوم کړی چې $\mathbf{c} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$ کیږي.

حل

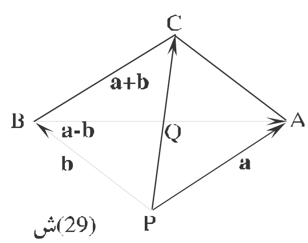
$\mathbf{c} = \overrightarrow{Pb} + \overrightarrow{BC} = \mathbf{b} + x(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = x\mathbf{a} + (1 - x)\mathbf{b} = x\mathbf{a} + y\mathbf{b}$.

ځکه چې $(x+y)=1 \Rightarrow y = 1 - x$ دي.

د مثال په توګه که چېرې C د $\overrightarrow{AB}$ وکتور نیمائي نقطه وي نو $\mathbf{c}=\frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ یا $\overline{BC} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b})$ کیږي.

4. ثبوت کوو چې په یوه متوازي‌الاضلاع کې قطرونه یو له بل سره په نیمائي کې قطع کوي.

حل فرضوو چې قطرونه یو له بل سره د Q په نقطه کې متقاطع دي. د (29) ش له مخې



ش(29)

$\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{BQ} \Rightarrow \;\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QB}$

کیږي.او دلته د **x** او **y** دوه مثبت عددونه موجود دي داسې چې

$\mathbf{b} = \mathbf{x}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) - \mathbf{y}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{a} + (\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{b}.$

$\Rightarrow \begin{smallmatrix} x-y=0 \\ x+y=1 \end{smallmatrix} \quad \Rightarrow 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}\ ; y = \frac{1}{2}$.

⇐ Q د قطرونو نیمائي نقطه ده.

5. د $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j};\ \mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ وکتورونه راکړل شوي دي.

a) د a او b وکتورونو اوږدوالی او جهت معلوم کړی.

b) د $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ وکتور اوږدوالی او جهت معلوم کړی ،

c) د $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ وکتور اوږدوالی او جهت معلوم کړی.

حل

a) $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}\ ,|\mathbf{a}| = \sqrt{3^2+4^2} = 5$

i) $\tan g\theta = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{3} \wedge \cos\theta = \frac{3}{5} \Rightarrow \theta = 53^o\ 8'$ او θ په اوله ربع کې ده.

ii) $\mathbf{b}=2\mathbf{i}-\mathbf{j}\ \ ; |\mathbf{a}| = \sqrt{2^2+1^2} = \sqrt{5}$

$\tan\theta = \frac{-1}{2}\ ; \cos\theta = \frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \theta = 333^o\ 26'$.

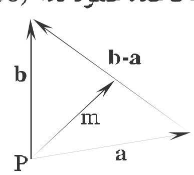
b) $\mathbf{a}+\mathbf{b} = (3\mathbf{i}+4\boldsymbol{j}) + (2\mathbf{i}-\mathbf{j}) = 5\mathbf{i}+3\mathbf{j}\ \Rightarrow \theta = 30°58'$.

c) $\mathbf{b}-\mathbf{a} = (2\mathbf{i}-\mathbf{j}) - (3\mathbf{i}+4\mathbf{j}) = -\mathbf{i}-5\mathbf{j}$

$|\mathbf{b}-\mathbf{a}| = \sqrt{1+25} = \sqrt{26}$

$\Rightarrow \tan g\theta = 5\ ;\ \cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{26}} \Rightarrow \theta = 258^o\ 41'$.

6. ثبوت کوو چې په متساوی الساقین مثلث کې میانه په قاعده عمود ده. (30)ش



(30)ش

حل

دا چې مثلث متساوی الساقین دی لیکو چې$|\mathbf{b}| = |a|$. د (3) مسئالې څخه پوهیږو چې:

$\mathbf{m}=\frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})$. (ځکه چې میانه قاعده په نیمائي کې قطع کوي.)

$\Rightarrow \mathbf{m}\cdot(\mathbf{b}-\mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b})(\mathbf{b}-\mathbf{a})$

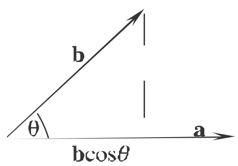
$$=\frac{1}{2}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}-\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})=\frac{1}{2}(|\mathbf{b}|^2-|\mathbf{a}|^2)=\mathbf{0}\ \Rightarrow \mathbf{m}\perp(\mathbf{b}-\mathbf{a}).$$

7. یو جسم د $\mathbf{a}=3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ وکتور په امتداد حرکت کوي او د $\mathbf{b}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ قوې د عمل په صورت کې د اجرا شوي کار مقدار معلوم کړی :

حل

(د متحرک جسم طی شوي فاصله)×(د **b** مقدار د **a** په جهت) = اجرا شوی کار

$$=(|\mathbf{b}|\cdot\cos\theta\cdot|\mathbf{a}|=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=(2\mathbf{i}+\mathbf{j})(3\mathbf{i}+4\mathbf{j})=10(\text{ واحده })$$



ش(31)

7. تمرین

1. فرض کوو چې د مبدا څخه یوجسم په حرکت شروع کړي ده ، داسې چې د مبدا څخه د x د مثبت جهت په خوا 4 واحده او بیا لاندې خواته د 3 واحدو په اندازه حرکت اجرا شوی دی .د جسم د موقعیت مختصات معلوم کړی.

2. د $P(6,2,3)$ ، $Q(-5,-1,4)$ او $R(0,3,8)$ نقطې د قائیم مختصاتو په دري بعده سیستم کې رسم کړی .
3. د $(2,3,5)$ نقطې د مرتسمونو مختصې د yz, xy او xz په مستوي کې رسم کړی .

4. هغه سطح چې د $x+y=2$ معالې په واسطه ښودل کیږي په $\mathbb{R}^3$ کې رسم او تشریح کړی .

د PQR مثلث د ضلعو اوږدوالی پیدا کړی . په هغه صورت کې چې د راسونو مختصې یې په لاندې توګه راکړل شوي دي

.

5. $P(3,-2,-3)$ ، $Q(7,0,1)$ ، $R(1,2,1)$
6. $P(2,-1,0)$ ، $Q(7,0,1)$ ، $R(4,-5,4)$

7. معلوم کړی چې د $P(2,4,2)$ ، $Q(3,7,-2)$ او $C(1,3,3)$ نقطې د یو مستقیم خط په امتداد پرتې دي .
8. د $(3,7,-5)$ نقطې فاصله د لاندېنیو مستویو څخه پیدا کړی .

i) xy- مستوي ii) yz- مستوي .

iii) xz- مسوي iv) د x محور څخه

معلوم کړی چې لاندې معادلې په کره پورې اړه لري ، او بیا یې د کرې د شعاع او مرکز مختصې پیدا کړی .

9. $x^2+y^2+z^2-6x+4y-2z\ =\ 11$

10. $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 10y = 1$

11. معلوم کړی چې د $P_1(x_1, y_1, z_1)$ او $P_2(x_2, y_2, z_2)$ دوو نقطو تر منځ مستقیم خط د نیمایي نقطې مختصه $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, \frac{z_1+z_2}{2})$ ده .

د لاندینیو افادو څخه د $\mathbf{a} \times \boldsymbol{b}$ قیمت پیدا کړی .

12. $\mathbf{a}=\langle 1,2,0\rangle \quad ; \quad \mathbf{b} = \langle 0,3,1\rangle$

13. $\mathbf{a}=\langle t, t^2, t^3\rangle \quad ; \quad \mathbf{b} = \langle 1,2t, 3t^2\rangle$

14. $\mathbf{a}=\mathbf{i}+3\mathbf{j}-2\mathbf{k} \quad ; \quad \mathrm{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

15. $(\mathbf{i}\times \mathbf{j}) \times \mathbf{k} = ?$

16. $\mathbf{k}\times (\mathbf{i} - 2\mathbf{j}) = ?$

17. $(\mathbf{j} - \mathbf{k})\times (\mathbf{k} - \mathbf{i}) = ?$

18. دوه واحد اورتو گونال وکتورونه پیدا کړی چې په$\langle 1,-1,1\rangle$او$\langle 0,4,4\rangle$دواړو وکتورونو باندې عمود وي .

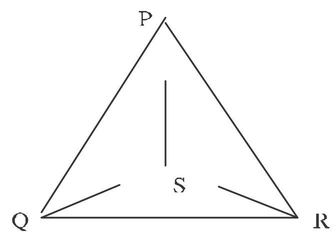
19. د ℓ یو خط چې د Qاو R دوو نقطو څخه تېرېږي، راکړل شوی دی . همدارنګه د P یوه نقطه چې د ℓ څخه د باندې پرته ده په نظر کې ونیسی. وښیئ چې د P نقطې فاصله (d) د ℓ خط څخه د $d=\frac{|a\times b|}{|a|}$ افادې په واسطه معلومولی شو ، په هغه صورت کې $\mathbf{a}=\vec{QR}$ او $\mathbf{b}=\vec{QP}$ وي .

20. ثبوت کړی چې $(\mathbf{a}-\mathbf{b})\times (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \mathbf{2}(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ کیږي

21. د(32) ش له مخې که$\mathbf{v}_1$ او $\mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4$ داسې وکتورونه وي چې د هغې اوږدوالی په ترتیب سره د R,Q,P اوS راسونو د مقابلو سطحو د مساحت سره مساوي ، او جهتونه یې د اړوند سطحو د خارج خواته دي

(a) وښیئ چې $\mathbf{v_1} + \mathbf{v_2} + \mathbf{v_3} + \mathbf{v_4} = 0$ کیږي .

(b) د R,Q,P اوS راسونو د مختصو په اساس د څلور مخې د حجم له پاره یو فرمول پیدا کړی .



(32) ش

22. فرضوو چې د پورتني ځلورمخي راسونه په S کې سره عمود دي .يعنې درې واړه زاويې په S کې قايمې دي . که B,A اوC د هغو سطحو مساحت وي چې په S کې سره قطع کوي ، او D د مقابلې سطحې(PQR) مثلث مساحت وي د 21. مسئلې د نتيجې په استعمال سره وښيئ چې

$$D^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

د فيثاغرث قضيې مفهوم لري .[12]

لسم فصل

په فضا کې د مستوي او منحني معادلې

1. دمستقیم خط معادله په فضا کې

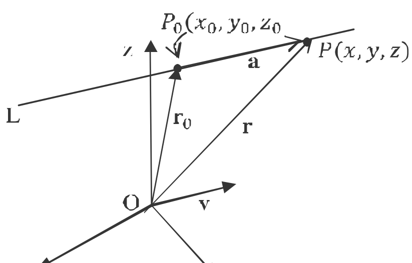
که د xy–په دوه بعده مستوي کې د خط جهت (میل یا د میلان زاویه) او یوه نقطه راته معلومه وي،په دې صورت کې د خط معادله د نقطې او میل له مخې معلومولی شو .دې ته ورته که د L خط یوه نقطه$P_0(x_0,y_0,z_0)$او د خط جهت په درې بعده فضاکې راته معلوم وي ،د خط معادله په درې بعده فضا کې په لاس راځي . نو که $P(x,y,z)$ د L خط یوه اختیاري نقطه ، r_0او r د P_0 او P نقطو د موقعیت وکتورونه($\overrightarrow{OP_0}$)او ($\overrightarrow{OP}$) او $\mathbf{a}=\overrightarrow{P_0P}$ وي.د (1) ش له مخې لیکو چې :

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+\mathbf{a}$$

(1)ش له مخې د $\mathbf{v}$ او $\mathbf{a}$ وکتورونه سره موازي دي نو دt یو سکالر شته چې $\mathbf{a}=t\mathbf{v}$ سره کیږي.لیکو چې :

$$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v} \qquad \ldots \qquad (1)$$

دا د L خط یوه وکتوري معادله ده ، او د t په هر قیمت کې د خط یوه نقطه دموقعیت وکتور په واسطه را ښودل کیږي .(1) ش



ش (1)

په دې ځای کې که $t>0$ وي د خط نقطې د P_0 په یوه خوا او که $t<0$ وي د خط نقطې د P_0 په بله خوا کې راځي .نو که L د $\mathbf{v}=\langle a,b,c\rangle$ جهت ولري $t\mathbf{v}=\langle ta,tb,tc\rangle$ کیږي .همدارنګه د $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$ او $\mathbf{r}_0=\langle x_0,y_0,z_0\rangle$له پاره د (1) وکتوري معادله لاندې شکل اختیاروي .

$$\langle x,y,z\rangle=\langle x_0+ta,y_0+tb,z_0+tc\rangle\ .$$

پوهیږو چې دوه وکتورونه سره مساوي دي .که چېرې او یوازې که چېرې د دوی اړوند مرکبې سره مساوي وي . نو له دې وجهې د دوی سکالري مرکبې، د $t\in\mathbb{R}$ له پاره په لاندې ډول دي :

$x=x_0+at\ ;y=y_0+bt\ ;z=z_0+ct$ ... (2)

پورتنیو معادلو ته د L خط پارامتریکې معادلې ویل کیږي ،او د هر t له پاره د L په خط باندې د P(x,y,z) یوه نقطه حاصلیږي ، په داسې حال کې چې L د $P_0\langle x_0,y_0,z_0\rangle$ نقطې څخه تیریږي او د v=⟨a, b, c⟩ جهت لري .

1. مثال

(a) د هغې خط وکتوري او پارامتریکې معادلې په لاس راوړی چې د (5,1,3) نقطې څخه تیریږي او د **i**+4**j**-2**k** وکتور سره موازي وي .

(b) دوې نورې نقطې په خط باندې پیدا کړی .

حل

(a) دلته $\mathbf{r}_0=\langle 5,1,3\rangle=5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ او **v**=**i**+4**j**-2**k** دی. نود (1) وکتوري معادلې له مخې لیکو چې :

$\mathbf{r}=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}=5\mathbf{i}+\mathbf{j}+3\mathbf{k})+t(\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k})$

$\mathbf{r}=(5+t)\mathbf{i}+(1+4t)\mathbf{j}+(3-2t)\mathbf{k}$ یا

کیږي او پارامتریکې معادلې یې د $x=5+t\ ;\ y=1+4t\ ;\ z=3-2t$ څخه عبارت دي .

(b) که t=1 انتخاب کړو z=1 ; y=5;x=6 کیږي او (6,5,1) د خط یوه بله نقطه په لاس راځي. همدارنګه د t= -1 په صورت کې د خط (4,-3,5) نقطه حاصلیږي .اوس که چیرې د خط د (5,1,3) نقطې په عوض د (6,5,1) انتخاب شي په دې صورت کې د خط له پاره یوه بله پارامتریکې معادله په لاندې ډول حاصلیږي :

$x=6+t\ ;y=5+4t\ ;z=1-2t$

او یا که چیرې د خط د (5,1,3) نقطه په خپل حال پریږدو او د L سره یو بل موازي وکتور 2**i**+8**j**-4**k** د جهت له پاره انتخاب کړو، په دې صورت کې د خط له پاره د

$x=5+2t\ ;\ y=1+8t\ ;\ z=3-4t$

پارامتریکې معادلې په لاس راځي . په عمومي ډول سره که v=⟨a, b, c⟩ د L سره موازي(د L جهت ولري) وي. په دې صورت کې د c,b,a عددونو ته د د جهت عددونه (directional numbers) ویل کیږي .ځکه

چې د v سره هر موازي وکتور د L د جهت له پاره استعمالولی شو . یعنې د c,b,a سره هر درې متناسب عددونه د جهت په عددونو پورې اړه لري .

د L خط د معادلې د ښودلو یوه بله لار داده چې که موږ د (2) معادلې څخه هره یوه د t له پاره حل کړو، د هغې څخه په هغه صورت کې چې د b,a او c څخه هېڅ یو د صفر سره نه وي مساوي ، لاندې معادله حاصلیږي .

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c} \quad \ldots \qquad (3)$$

.دا ډول معادلې ته د L متناظره معادله (symmetric equation) ویل کیږي .

یادونه په (3) معادله کې b,a او c ، د L د جهت عددونه دي . یعنې د یو هغې وکتور مرکبې دي، چې د L سره یې جهت موازي دی . که چېرې یو له b,a او c څخه مساوي په صفر وي بیا هم موږ د L له پاره متناظره معادله په لاس راوړلی شو ..د مثال په توګه که a=0 شي نود (2) معادلې څخه

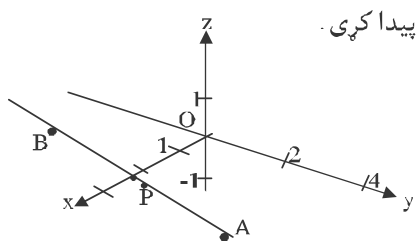
$$x=x_0 \;\; ; \;\; \frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$$

حاصلیږي .په دې حالت کې د L خط د $x=x_0$ په مستوي کې پروت دی.

2. مثال

(a) د L خط د A(2,4,-3) او B(3,-1,1) نقطو څخه تېریږي ، پارامتریکې او متناظرې معادلې یې پیدا کړی .

(b) د L خط د تقاطع نقطه د xy− مستوي سره پیدا کړی .



(2) ش

حل

(a) دلته د L سره د موازي وکتور(v) نه دی راکړل شوی، اول د v وکتور چې د L سره موازي وي پیدا کوو.ښوهیږو چې د $V=\langle 3-2,-1-4,1-(-3)\rangle=\langle 1,-5,4\rangle$ د L سره موازي دی،او د جهت عددونه یې a=1;b= -5; c=4 دي . که $P_0(2,4,-3)$ قبول کړو، نو (2) پارامتریکې معادله لاندې شکل غوره کوي .

x=2+t ; y=4-5t ; z= - 3+4t

همدارنګه د (3) معادلې له مخې د خط له پاره لاندې متناظره معادله په لاس راځي :

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z+3}{4}$$

(b) د L خط د تقاطع نقطه د xy− مستوي سره په z=0 کې لټېږو ، په لاس راځي :

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{-5}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow y=\frac{1}{4}\ ;\ x=\frac{11}{4}$$

یعنې د $(\frac{11}{4},\frac{1}{4},0)$ نقطه د L او xy− مستوي د تقاطع نقطه ده .

د پورتني مثال څخه معلومیږي چې که د L خط د $P_0(x_0,y_0,z_0)$ او $P_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطو څخه تیریږي ، د جهت عددونه یې $a=x_1-x_2$, b=y_1-y_0 او c=z_1-z_0 او متناظره معادله یې

$$\frac{x-x_0}{x_1-x_0}=\frac{y-y_0}{y_1-y_0}=\frac{z-z_0}{z_1-z_0}$$

کیږي .همدارنګه د خط وکتوري معادلې له پاره د **v** په جهت $\boldsymbol{r}(\mathrm{t})=\mathbf{v}_0+t\mathbf{v}$ دی. نو که د L خط دوې نقطې (x_0,y_0,z_0) او (x_1,y_1,z_1) راته معلومې وي ، په دې صورت کې $\mathbf{v}=\mathbf{r}_0-\mathbf{r}_1$ کیږي او د L وکتوري معادله په لاندې ډول لیکلی شو :

$$\mathbf{r}(\mathrm{t})=\mathbf{r_0}+t(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_0)=(\mathbf{1}-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r_1}\ ;0\le t\le 1$$

په نتیجه کې د L قطعه خط د $\mathbf{r}_0$ څخه تر $\mathbf{r}_1$ پورې د

$$\mathbf{r}(\mathrm{t})=(1\text{-}\mathrm{t})\mathbf{r_0}+t\mathbf{r_1}$$

وکتوري معادله لري .

3. مثال

د $\mathbf{L}_1$ او $\mathbf{L}_2$ خطونو پارامتریکې معادلې په لاندې ډول راکړل شوي دي :

L_1: x=1+t ; y=-2+3t ; z =4- t او L_2: x=2s ; y=3+s ; z = -3+4s . معلوم کړی چې L_1 او L_2 په خپل منځ کې یساري خطونه (Skew lines) دي .یعنې نه موازي او نه متقاطع دي .

حل

خطونه سره موازي نه دي ، ځکه چې په دوی پورې اړوند وکتورونه $\langle 1,3,-1\rangle$ او $\langle 2,1,4\rangle$ سره موازي نه دي(یعنې د دوی مرکبې سره متناسب نه دي . .نو که L_2او L_1 سره متقاطع وي په دې صورت کې د t او s عددونه شته ،چې د هغوی له پاره لاندې معادلې صدق کوي :

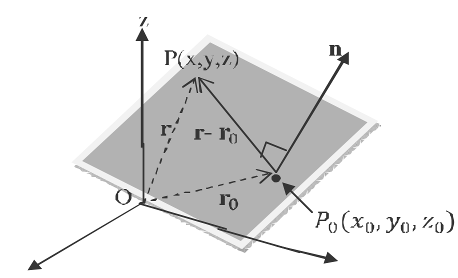
$$1+t = 2s \quad ; \quad -2+3t = 3+s \quad ; \quad 4-t = -3+4s \quad .$$

که موږ پورته معادلو څخه اولې دوې معادلې حل کړو، د هغې د حل څخه $t=\frac{11}{5}$ او $s=\frac{8}{5}$ په لاس راځي او دریمه معادله په هغوی کې صدق نه کوي .له دې وجې وایو چې د L_2او L_1 د تقاطع نقطه نه لري او یساري خطونه دي .

2. مستوي په فضا کې

پورته وښودل شوه چې یو خط په فضا کې د یوې نقطې او یو جهت په واسطه معلوموولی شو. په فضا کې د مستوي مفهوم واضح کول مشکل کار دې ، د هغې جهت د خط په شان دیو خط او یوې نقطې په واسطه نه معلومیږي ،په فضا کې د مستوي جهت ،په مستوي باندې د یو عمود وکتور($\mathbf{n}$) او یوې نقطې $P_0(x_0,y_0,z_0)$ په واسطه په مکمله توګه معلومیدلی شي او عمود وکتور ($\mathbf{n}$) د نورمال وکتور په نوم یادیږي .

د مستوي د وکتوري معادلې لاس ته راوړلو په اړه فرضوو چې P(x,y,z) د مستوي اختیاري نقطه، $\mathbf{r}_0$ او $\mathbf{r}$ په ترتیب سره د $\mathbf{P_0}$ او P نقطو د موقعیت وکتورونه دي . په دې صورت کې $\overrightarrow{P_0P}$ د $\mathbf{r}-r_0$ په واسطه ښودلی شو (3) ش



دا چې نورمال ($\mathbf{n}$)وکتور دراکړل شوي مستوي پرهر وکتور باندې(3) په خاصه توګه په $\mathbf{r}-\mathbf{r}_0$ باندې عمود دی ، نو لیکو چې:

$$\mathbf{n}\cdot(\mathbf{r}-r_0)=\mathbf{0} \quad \ldots \qquad (4)$$

$$\Rightarrow \mathbf{n}\cdot\mathbf{r} = \mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0 \quad \ldots \qquad (5)$$

دلته(4) یا (5) هره یوه د مستوي د وکتوري معادلې په نوم یادیږي .د مستوي د سکالري معادلې له پاره **r,n** او $\mathbf{r}_0$ په ترتیب سره د $\mathbf{n} = \langle a,b,c\rangle$ $\mathbf{r}=\langle x,y,z\rangle$ او $\mathbf{r}_0 = \langle x_0, y_0, z_0\rangle$ په شکل سره لیکو.په دې صورت کې (4) معادلې له مخې لیکو چې :

$$\langle a,b,c\rangle \cdot \langle x-x_0, y-y_0, z-z_0\rangle = 0$$

$$a(x-x_0) + b(y-y_0) + c(z-z_0) = 0 \quad \ldots \qquad (6)$$

(6) معادله د هغې مستوي سکالري معادله ده چې د $P_0(x_0,y_0,z_0)$ څخه تیریږي او په $\mathbf{n}=\langle a,b,c\rangle$ نورمال وکتور باندې عمود وي .

4. مثال

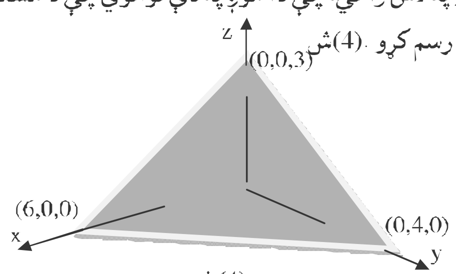
دهغې مستوي معادله ولیکی چې د(2,4,-1) نقطې څخه تیریږي او په $\mathbf{n}=\langle 2,3,4\rangle$ باندې عمود وي. همدارنګه د هغې د تقاطع نقطې د y,x او یا z محورونو سره پیدا کړی .

حل

دلته $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$, $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ او $z_0 = -1$ دی (4)ش. د (6) معادلې په نظر کې نیولو سره د مستوي معادله په لاندې ډول ده:

$$2(x-2)+3(y-4)+4(z+1) = 0 \Rightarrow 2x + 3y + 4z = 12 \;.$$

د مستوي د تقاطع نقطو له پاره په x محور باندې y=z=0 وضع کوو او x=6 په لاس راځي .همدارنګه د z په محور باندې د z=3 او د y په محور باندې y = 4 په لاس راځي. چې دا موږ په دې توانوي چې د مستوي یوه برخه چې په اوله اته مخې (Octant) کې پرته ده رسم کړو .(4)ش



ش (4)

د(6) معادلې او 4. مثال په نظر کې نیولو سره د مستوي معادله په لاندې ډول لیکو :

$$ax+by+cz+d = 0 \quad \ldots \qquad (7)$$

او $d=-(ax_0 + by_0 + cz_0)$ دی .(7) معادله نظر y,x او z ته د خطي معادلې په نوم یادیږي . همدارنګه وایو چې که لږ تر لږه b,a یا c د صفرخلاف وي ،په دې صورت کې (7) معادله په یوه مستوي پورې اړه لري چې نورمال وکتور يې $\langle a, b, c\rangle$ دی .

5. مثال

د هغې مستوي معادله پیدا کړئ ،چې د P(1,3,2) , Q(3,-1,6) او R(5,2,0) نقطو څخه تېریږي .

حل

په $\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PQ}$ پورې اړوند وکتورونه$\mathbf{a}=\langle 2,-4,4\rangle$ او $b=\langle 4,-1,-2\rangle$ دي، چې دواړه په یوه مستوي کې پراته دي او د **n** له پاره يې لیکو چې :

$$\mathbf{n}=\mathrm{a}\times b = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -4 & 4 \\ 4 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 12\mathbf{i} + 20\mathbf{j} + 14\mathbf{k}$$

په نتیجه کې د P(1,3,2) او نورمال وکتور $(\boldsymbol{n})$ په نظر کې نیولو سره د مستوي معادله په لاندې ډول ده :

$$12(x-1)+20(y-3)+14(z-2)=0 \Rightarrow 6x + 10y + 7z = 50$$

6. مثال

د خط پارامتریکې معادلې $x=2+3t$; $y=-4t$; $z=5+t$ راکړل شوي دي . د تقاطع نقطې يې د $4x+5y-2z=18$مستوي سره په لاس راوړئ .

حل

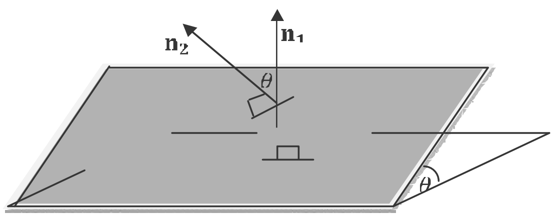
موږ د z,y,x قیمتونه د پارامتریکې معادلو څخه د مستوي په معادله کې وضع کوو :

$$4(2+3t)+5(-4t)-2(5+t)=18 \Rightarrow -10t = 20 \Rightarrow t = -2 \;.$$

او د $t=-2$ په قیمت کې $x=2+3(-2)=-4$; $y=-4(-2)=8$ او $z=5+(-2)=3$ حاصلیږي،نو له دې وجې د (-4,8,3)نقطه د خط او مستوي د تقاطع نقطه ده.

نوټ

دوې مستوی سره موازي دي ،که د دوی نورمال وکتورونه سره موازي وي . د مثال په توګه د $x+2y-3z=4$ مستوي د $2x+4y-6z=3$ مستوي سره موازي دی ، ځکه چې د دوی د نورمال وکتورونه $\mathbf{n}_1 = \langle 1,2,-3\rangle$ او $\mathbf{n}_2 = \langle 2,4,-6\rangle$ تر منځ د $\mathbf{n}_2 = 2\mathbf{n}_1$ رابطه موجوده ده . که چېرې دوې مستوی سره موازي نه وي ،نو دوی د یوه مستقیم خط په امتداد د یوې زاویې په درلودلو سره متقاطع دي. دا هم زیاتوو، چې د دوو متقاطع مستویو تر منځ زاویه د دوی د نورمال وکتورونو n_2 او $\mathbf{n}_1$ تر منځ د حادې زاویې څخه عبارت دی.



(5)ش

7. مثال

(a) د $x+y+z=1$ او $x-2y+3z=1$ دوو مستویو ترمنځ زاویه پیدا کړی .

(b) ددوو مستویو ترمنځ د تقاطع خط(L) له پاره، متناظره معادله (**symmetric equation**) پیدا کړی.

حل

(a) ددې دوو مستویو نورمال وکتورونه په ترتیب سره $\mathbf{n}_1 = \langle 1,1,1\rangle$ او $\boldsymbol{n}_2 = \langle 1,-2,3\rangle$ دي، او د مستویو تر منځ زاویې $(\boldsymbol{\theta})$ د پیدا کولو له پاره لیکو چې :

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{n}_1\cdot\mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} = \frac{1(1)+1(-2)+1(3)}{\sqrt{1+1+1}\,.\sqrt{1+4+9}} = \frac{2}{\sqrt{42}} \Rightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{42}}\right) = 72^o$$

(b) د اول ځل له پاره د L په خط باندې یوه نقطه پیدا کوو. دمثال په توګه موږ کولی شو چې د خط تقاطع نقطه د xy-مستوي سره د $z=0$ په وضع کولو سره د مستویود معادلوڅخه په لاس راوړو. یعنې

$x+y=1$; $x-2y=1$ $\Rightarrow x = 1; y = 0$.

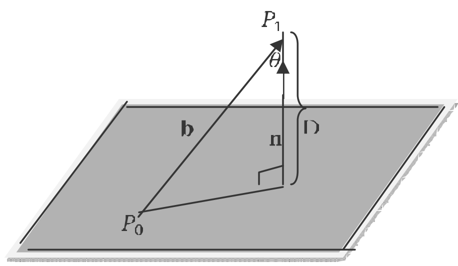
نو ځکه(1,0,0) د L خط یوه نقطه ده .دا چې د L خط په دواړو مستویو کې پر وت ،او د مستویو په دواړو نورمال وکتورونو باندې عمود دی .نو ځکه د $\mathbf{v}$ وکتور د پیدا کولو له پاره چې د $\mathbf{L}$ سره موازي دی د $\mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2$ وکتوري ضرب پیدا کوو :

$$\mathbf{v}=\mathbf{n_1}\times\mathbf{n_2}=\begin{vmatrix} i & j & k\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 3\end{vmatrix}=5\mathbf{i}-2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$$

او د L خط متناظره معادله $\frac{x-1}{5}=\frac{y}{-2}=\frac{z}{-3}$ کیږي .

.8 مثال

د $P_1(x_1,y_1,z_1)$ نقطې او د $ax+by+cz+d=0$ مستوي تر منځ فاصلې (D) د پیدا کولو له پاره فرمول پیدا کړی .



(6) ش

حل

فرضوو چې د مستوي یوه نقطه $P_0(x_0,y_0,z_0)$ ده او **b** په $\overrightarrow{P_0P_1}$ پورې اړوند وکتور دی .نو

$$\mathbf{b}=\langle x_1-x_0, y_1-y_0\ , z_1-z_0\rangle$$

کیږي . همدارنګه د (6) ش له مخې پوهیږو، چې د P_1 نقطې او مستوي تر منځ فاصله (D)، د **b** سکالري مرتسم د نورمال وکتور ($\mathbf{n}=\langle a,b,c\rangle$) په جهت باندې د مطلقه قیمت څخه عبارت دی .یعنې

$$D=|com_{\mathbf{n}}\mathbf{b}|=\frac{|\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}|}{|\mathbf{n}|}$$

$$=\frac{|a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

$$=\frac{|(ax_1+by_1+cz_1)-(ax_0+by_0+cz_0)|}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

$$D=\frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}\quad\ldots\qquad(8)$$

.9 مثال

د $10x+2y-2z=5$ او $5x+y-z=1$ دوو موازي مستویو، تر منځ فاصله پیدا کړی .

حل

په ښکاره معلومیږي چې راکړل شوي دوې مستوی سره موازي دي. ځکه چې د دوی نورمال وکتورونه$\langle 5,1,-1\rangle$ او$\langle 10,2,-2\rangle$ سره موازي دي .د دوی تر منځ د فاصلې پیدا کولو له پاره یوه نقطه په یوه مستوي باندې ټاکو او بیا د هغې فاصله ،د بلې مستوي سره پیدا کوو.نو که په خاصه توګه$y=z=0$ په اوله معادله کې کېږدو .د هغې ځخه$10x=5$ په لاس راځي.نو وایو چې $(\frac{1}{2},0,0)$ د مستوي یوه نقطه ده او د (8) فرمول له مخې د$(\frac{1}{2},0,0)$ نقطې او$5x+y-1=0$ معادلې تر منځ فاصله

$$D=\frac{\left|5\left(\frac{1}{2}\right)+1(0)-1(0)-1\right|}{\sqrt{5^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{\frac{3}{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{6}$$

کېږي .

10. مثال

په 3. مثال کې مو وښودل چې د

$$L_1: \ x=1+t \ ; y=-2+3t \ ; \ z=4-t$$

$$L_2: \ x=2s \ ; \ y=3+s \ ; \ z=-3+4s$$

وکتورونه یساري وکتورونه دي .د دوی تر منځ فاصله پیدا کړی .

حل

دا چې L_1 اوL_2 وکتورونه یساري دي . داسې فکر کوو چې دوی په دوو موازي مستویو P_1 اوP_2کې پراته دي ،او د دوی تر منځ فاصله د پورتني مثال په شان پیدا کوو .دا هم پوهیږو چې د دوو مستویو مشترک نورمال وکتور حتماً باید د L_1 اوL_2 په جهتونو یعنې په$\mathbf{v}_1=\langle 1,3,-1\rangle$ او $\mathbf{v}_2=\langle 2,1,4\rangle$ دواړو باندې عمود وي . نو نورمال وکتور د

$$\mathbf{n}=\mathbf{v}_1\times\mathbf{v}_2=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 1 & 3 & -1\\ 2 & 1 & 4\end{vmatrix}=13\mathbf{i}-6\mathbf{j}-5\mathbf{k}$$

سره مساوي دی .که چېرې$s=0$ دL_2په معادله کې وضع شي په L_2 باندې د$(0,3,-3)$ نقطه په لاس راځي او د P_2له پاره لاندې معادله په لاس راوړو:

$13(x-0)-6(y-3)-5(z+3)=0$ یا $13x-6y-5z+3=0$

همدارنګه که $t=0$ د L_1 په معادله کې وضع کړو ،نو د P_1 مستوي د (1,-2,4) یوه نقطه حاصلیږي په نتیجه کې د (1,-2,4) نقطې او13x-6y-5z+3=0 مستوي تر منځ فاصله په لاندې ډول ده :

$$D=\frac{|13(1)-6(-2)-5(4)+3|}{\sqrt{13^2+(-6)^2+(-5)^2}}=\frac{8}{\sqrt{230}}\approx 0.53 \qquad [12]$$

3. په فضا کې وکتوري تابع او منحني

د حقیقي توابعو په اړه مو پوره معلومات تر لاسه کړل. اوس داسې تابع مطالعه کوو چې د هغې قېمتونه په وکتور پورې اړه لري او دهغې په واسطه کولی شو چې په فضا کې د منحنیو ، سطحو او د جسمونو د حرکت په رابطه پوره معلومات راټول او دهغې د استعمال اسانتیاوې درته په ګوته کړو .په خاصه توګه د دارنګه توابعو څخه د کیپلر (Kepler's) د قوانینو په مطالعه او دنجوم په علم کې د ستورو د حرکت په څېړنو کې ډېر کار اخیستل شوی دی او ډېرې اسانتیاوې یې منځ ته راوړې دي .

a) وکتوري تابع

په عمومي ډول سره یوه تابع داسې رابطه ده چې دتعریف ساحې هر عنصر د تابع د قېمتونو ساحې، یوازې د یوه عنصر سره اړیکه لري .وکتوري تابع هم یوه تابع ده ، چې د هغې د تعریف ساحه د حقیقي عددونو یو سټ دی او د قېمتونو ساحه یې د وکتورونو په سټ پورې اړه لري. دلته هغه وکتوري تابع (r) په نظر کې نیول شوې ده چې د قېمتونو ناحیه یې درې بعده وکتورونه دي . یعنې د**r** تابع د تعریف ناحیې د هر حقیقي عدد(**t**) له پاره یوازې یو وکتور په درې بعده (V_3) کې راښیي. چې هغه په $r(t)$ سره ښیو .نو که چېرې $f(t)$، $g(t)$ او $h(t)$ د $\mathbf{r}(t)$ وکتور مرکبې وي ، په دې صورت کې د f ، g او h توابعوته د **r** وکتوري مرکبې(component function) ویل کیږي او داسې یې لیکو چې :

$$\mathbf{r}(t)=\langle f(t),g(t),h(t)\rangle=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\boldsymbol{k}$$

په دې ځای کې، د معمول په څېر د متحول له پاره t لیکو ، ځکه چې اکثراً د وکتوري تابعو په کارونه کې، وخت (t) ډېر استعمالیږي .

11. مثال

که $\mathbf{r}(t)=\langle t^3, ln(3-t),\sqrt{t}\rangle$ وي ،نو د هغې مرکبې

$f(t)=t^3$, $g(t)=\ln(3-t)$, $h(t)=\sqrt{t}$

دي ، چې په دې ترتيب د r تابع د تعريف ناحيه ټول هغه حقيقي عددونه ($t\epsilon\mathbb{R}$) دي چې د هغې له پاره د $\mathbf{r}(t)$ تابع د تعريف وړ وي . دلته د $f(t)=t^3$; $g(t)=\ln(3-t)$; $h(t)=\sqrt{t}$ توابع هغه وخت د t له پاره د تعريف وړ دي چې $3-t>0$ او $t\geq 0$ وي نو له دې وجې د $\mathbf{r}$ د تعريف ساحه د $[0,3)$ انترول دی .

1.10 تعريف

د وکتوري تابع ($\mathbf{r}$)ليمېټ د هغوی د مرکبو د ليمېټ څخه عبارت دی. يعنې که

$$\mathbf{r}(t)=\langle f(t), g(t), h(t)\rangle \qquad \dots \qquad (9)$$

وي ، نو

$$\lim_{t\to a} \mathbf{r}(t)=\langle \lim_{t\to a} f(t), \lim_{t\to a} g(t), \lim_{t\to a} h(t)\rangle \qquad \dots \qquad (10)$$

کيږي ، په دې شرط که د مرکبو(f,g,h) ليمېټونه يې موجود وي .

12. مثال

که $\mathbf{r}(t)=(1+t^3)\mathbf{i}+te^{-1}\mathbf{j}+\frac{sint}{t}\mathbf{k}$ وي نو $\lim_{t\to\infty}\mathbf{r}(t)$ پيدا کړی .

حل

د ليمېټ د تعريف له مخې ليکو چې :

$$\lim_{t\to 0}\mathbf{r}(t)=[\lim_{t\to 0}(1+t^3]\mathbf{i}+\lim_{t\to 0}[te^{-1}]\mathbf{j}+\lim_{t\to 0}\left[\frac{sint}{t}\right]\mathbf{k}\ =\mathbf{i}+\mathbf{k}$$

2.10 تعريف

د $\mathbf{r}(t)$ وکتوري تابع متمادي ده که $\lim_{t\to a}\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(a)$ صدق وکړي .

د 1.10 تعريف په نظر کې نيولو سره $\mathbf{r}$ په a کې متمادي ده که چېرې او يوازې که چېرې د هغې مرکبې f,g او h په a کې متمادي وي .

b) په فضا کې منحني

فرض کوو چې f,g او h د I په انترول کې د حقيقي قيمتونو تابع ګانې دي ، نو C د فضا د ټولو هغو نقطو(x,y,z) سټ دی ، چې $x=f(t)$,$y=g(t)$ او $z=h(t)$ په هغه کې صدق کوي .کوم وخت چې د t پارامترد I په انترول کې تحول کوي د هغې په تحول سره د فضا يوه منحني(C) په لاس راځي . دلته که د

$\mathbf{r}(t)=\langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ وکتوري تابع ولرو، نو $\mathbf{r}(t)$ د $P(f(t),g(t),h(t))$ نقطې د موقعیت وکتور (position vector) د C په منحني باندې د t په وخت کې راښيي .

13. مثال

هغه منحني چې په $\mathbf{r}(t)=\langle 1+t, 2+5t, -1+6t\rangle$ وکتوري تابع پورې اړه لري څه خصوصيات لري ؟ ،مشخص يې کړی .

حل

پوهيږو چې په $\mathbf{r}(t)$ پورې اړوند پارامتريکې معادلې د $x=1+t$,$y=2+5t$,$z=-1+6t$ **څخه عبارت دي** .او د (1) رابطې له مخې د $\mathbf{r}(t)$ تابع د $\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+t\mathbf{v}$ شکل لري چې $\mathbf{r}_0=\langle 1,2,-1\rangle$ او $\mathbf{v}=\langle 1,5,6\rangle$ دی . په نتيجه کې وايو چې راکړل شوي معادله په فضا کې د يو خط له پاره وکتوري معادله ده .

په همدې ډول که په يوه مستوي کې يوه منحني راکړل شوي وي، هغه هم د وکتوري تابع په واسطه سره ښودل کيږي. .د مثال په توګه که يوه منحني د $x=t^2-2t$, $y=t+1$ پارامتريکې معادلو په واسطه راکړل شوي وي،د هغې وکتوري معادله د

$$\mathbf{r}(t)=\langle t^2-2t, t+1\rangle=(t^2-2t)\mathbf{i}+(t+1)\mathbf{j}$$

سره مساوي کيږي، په داسې صورت کې چې $\mathbf{i}=\langle 1,0\rangle$ او $\mathbf{j}=\langle 0,1\rangle$ دی .

14. مثال

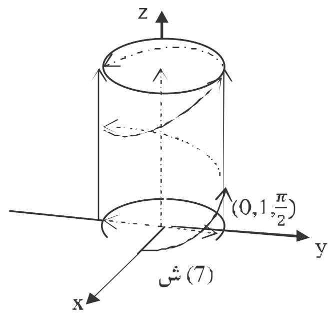
په $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ وکتوري معادله پورې اړوند منحني رسم کړی .

حل

د منحني پارامتريکې معادلې $x=\cos t$, $y=\sin t$ او $z=t$ دي، همدارنګه

$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$$

کيږي. **دلته معلوميږي** چې منحني بايد په دايروي سلنډر باندې پرته وي . او (x,y,z) د $(x,y,0)$ **نقطې د** پاسه د ساعت ستنې په خلاف لوري د xy- په مستوي کې د $x^2+y^2=1$ دايرې په چاپېر دوران کوي .څرنګه چې $z=t$ دی،نو منحني د t په زياتيدو د سلنډر په چاپېر پورته خواته په تاو شوي شکل حرکت کوي او هغه شکل چې په لاس راځي د هيليکس (*Helex*) په نوم ياديږي .



(7) ش

15. مثال

یو خط چې د P(1,3,-2) او Q(2,-1,3) دوو نقطو څخه تېرېږي ، وکتوري او پارامتریکې معادلې یې ولیکئ .

حل

د (1) رابطې له مخې لیکو چې:

$$\mathbf{r}(t)=\mathbf{r}_0+(\mathbf{r_1}-\mathbf{r}_0)t$$
$$=(1-t)\mathbf{r}_0+t\mathbf{r}_1\ \ ;0\le t\le 1$$

خرنګه چې $\mathbf{r}_0=\langle 1,3,-2\rangle$ او $\mathbf{r_1}=\langle 2,-1,3\rangle$ دی . نو د P او Q نقطو ترمنځ د قطعه خط ، وکتوري معادله په لاندې ډول ده .

$$\mathbf{r}(t)=(1-t)\langle 1,3,-2\rangle+t\langle 2,-1,3\rangle\ \ ,0\le t\le 1$$

یا

$$\mathbf{r}(t)=\langle 1+t,3-4t,-2+5t\rangle\ \ .$$

چې پارامتریکې معادلې یې د $x=1+t\ ,\ y=3-4t\ ,z=-2+5t$ کېږي .

4. د وکتوري توابعو مشتقات

ددې فصل په اخېر کې موږ غواړو چې د ستورو او نورو فضایي جسمونو لکه سټالایټ د حرکت د مسیر څخه بحث وکړو . نو ښه به وي چې د وکتوري توابعو مشتقاتو او د هغوی محاسبې ته ښه پاملرنه وشي.

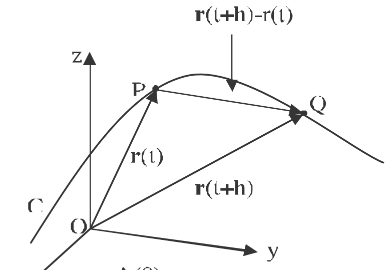
3.10 تعریف

د وکتوري تابع($\mathbf{r}$) مشتق ،یو وکتور دی او د حقیقي توابعو د مشتق په شان یې په لاندې ډول تعریف کوو :

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}:=\mathbf{r}'(t)=\lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}\quad \dots \qquad (11)$$

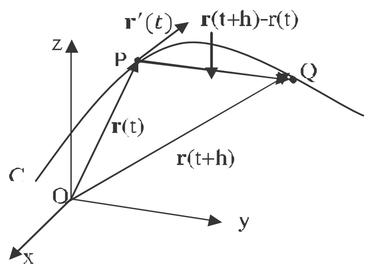
په هغه صورت کې چې پورتنی لیمټ موجود وي .

او هندسي مفهوم يې په دې ډول دی، چې که د P او Q نقطو د موقعيت وکتورونه(***position vectors***) $\mathbf{r}(t)$ او $\mathbf{r}(t+h)$ وي، نو $\overrightarrow{PQ}$ د $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ وکتور په واسطه ښودلی شو اويو وتري وکتور په منحني باندې راښيي .(8)ش



ش (8)

که h>0 وي د ($\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t))$ سکالري مضرب د $\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)$ په شان جهت لري ، او کوم وخت چې $h\to 0$ ته نږدې کيږي، په دې صورت کې د ($\frac{1}{h}(\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t))$ وکتور يوه وکتور ته چې هغه د P په نقطه کې د C په منحني باندې مماس د ی ،نږدې کيږي . نو له دې وجې د $\mathbf{r}'(t)$ وکتور ته د $\mathbf{r}(t)$ په منحني باندې د P په نقطه کې مماسي وکتور ويل کيږي، په دې شرط چې($\mathbf{r}'(t)$ موجوداود صفر خلاف وي .(9) ش



ش (9)

په نتيجه کې وايو ، چې د P په نقطه کې مماسي خط هغه خط دی چې د P نقطې څخه تېرېږي او د $\mathbf{r}'(t)$ سره موازي وي . د محاسبې د اسانی په خاطر د $\mathbf{r}'(t)$ واحد مماسي وکتور په $\mathbf{T}(t)$ سره ښيو او په لاندې ډول دی .

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\quad .$$

1.10 دعوی

که $\mathbf{r}(t)=\langle f(t), g(t), h(t)\rangle = f(t)\mathbf{i} + g(t)\mathbf{j} + h(t)\mathbf{k}$ وي ، نو

$$\mathbf{r}'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle = f'(t)\mathbf{i} + g'(t)\mathbf{j} + h'(t)\mathbf{k} \ \ldots \qquad (12)$$

کیږي .

ثبوت

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left[\langle f(t+\Delta t), g(t+\Delta t), h(t+\Delta t)\rangle - \langle f(t), g(t), h(t)\rangle\right]\\ &= \lim_{\Delta t\to 0}\left\langle\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}, \frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}, \frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right\rangle\\ &= \left\langle\lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-g(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t\to 0}\frac{h(t+\Delta t)-h(t)}{\Delta t}\right\rangle\\ &= \langle f'(t), g'(t), h'(t)\rangle \quad\blacksquare\end{aligned}$$

16. مثال

د $\mathbf{r}(t)=(1+t^3)\mathbf{i} + te^{-t}\mathbf{j} + \sin 2t\mathbf{k}$ وکتوري تابع په نظر کې نیسو

(a) $\mathbf{r}'(t)$ پیدا کړی .

(b) په منحني باندې واحد مماسي وکتور په $t=0$ کې پیدا کړی .

حل

(a) $\mathbf{r}'(t) = 3t^2\mathbf{i}+(1-t)e^{-t}\mathbf{j} + 2\cos 2t\mathbf{k}$

(b) $\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{j} + \frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$.

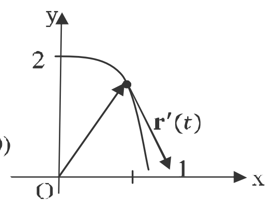
17. مثال

د $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\mathbf{i} + (2-t)\mathbf{j}$ منحني له پاره $\mathbf{r}'(t)$ او $\mathbf{r}'(1)$ پیدا کړی .

حل

$$\mathbf{r}'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i} - \mathbf{j} \Rightarrow \mathbf{r}'(1) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - \mathbf{j} \quad .$$

د پورته راکړل شوي وکتوري معادلې منحني د مستوي یوه منحني ده، او که موږ د $x=\sqrt{t}$ او $y=2-t$ معادلو څخه د t پارامتر له منځه یوسو ،په دې حالت کې د $x \geq 0$ له پاره $y=2-x^2$ حاصلیږي.چې ګراف یې په(10)ش کې د موقعیت کتور $\mathbf{r}(1)$ او $\mathbf{r}'(1)$ سره یو ځای رسم شوی دی .



(10) ش

18. مثال

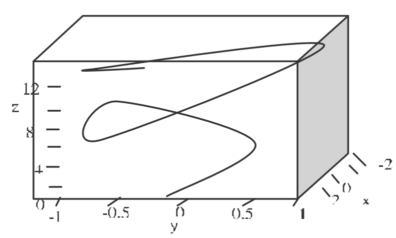
x=2cost , y=sint , z= t د یوه هېلکس پارامتریکې معادلې دي . د هغې د ټانجنټ معادله په $(0,1,\frac{\pi}{2})$نقطه کې پیدا کړی.

حل

د هېلکس وکتوري معادله$\mathbf{r}(t)=\langle 2cost, sint, t\rangle$ او $\mathbf{r}'(t) = \langle -2sint, cost, 1\rangle$ کیږي .د پارامتر قېمت په $(0,1,\frac{\pi}{2})$ نقطه کې$t=\frac{\pi}{2}$ او د ټانجنټ وکتور قېمت په$t=\frac{\pi}{2}$ کې $\mathbf{r}'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -2,0,1\rangle$ کیږي .نو د (2) معادلې له مخې د ټانجنت پارامتریکې معادلې د $x= - 2t$, $y = 1$, $z =\frac{\pi}{2} + t$ سره مساوي کیږي .همدارنګه د حقیقي توابعو په شان د وکتوري توابعو د دوهم مشتق له پاره لیکو چې :

$\mathbf{r}'' = (\mathbf{r}')'$

د مثال په توګه د پورته مثال څخه لیکو چې : $\mathbf{r}''(\mathbf{t}) = \langle -2 \cos t , -\sin t , 0\rangle$.



(11) ش

نوټ

د حقیقي توابعو په شان لوړ مرتبه مشتقات هم په لاس راوړلی شو. د مثال په توګه د پورته مثال څخه لیکو چې

$r'' = (r')'=\langle -2cost, -sint, 0\rangle$

2.10 دعوی

فرضوو چې $\mathbf{u}$ او $\mathbf{v}$ مشتق منونکي وکتوري توابع، c سکالر او f د حقیقي قېمتونو تابع ده. نو لاندې رابطې صدق کوي:

1. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) + \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) + \mathbf{v}'(t)$

2. $\frac{d}{dt}[c\boldsymbol{u}] = c\mathbf{u}'(\boldsymbol{t})$

3. $\frac{d}{dt}[f(t)\boldsymbol{u}(t)] = f'(t)\boldsymbol{u}(t) + f(t)\boldsymbol{u}'(t)$

4. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t)$

5. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}(t)] = \mathbf{u}'(t) \times \mathbf{v}(\boldsymbol{t}) + \mathbf{u}(t) \times \mathbf{v}'(\boldsymbol{t})$

6. $\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(f(t))] = f'(t)\mathbf{u}'\big(f(t)\big)$

د پورتنی دعوې ثبوت د 3.10 تعریف او یاد 1.10 دعوې له مخې په اسانی سره حاصلیږي. دلته موږ یوازې (4) شماره په ثبوت رسوو او پاتې نور د تمرین په توګه درته پاتې شول.

ثبوت

که $\mathbf{u(t)}=\langle f_1(t). f_2(t), f_3(t)\rangle$ او $\mathbf{v(t)}= \langle g_1(t). g_2(t), g_3(t)\rangle$ وي، نو لیکو چې:

$$\mathbf{u}(t)\cdot \mathbf{v}(t) = f_1(t)g_1(t) + f_2(t)g_2(t) + f_3(t)g_3(t) = \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)$$

نو د توابعو د ضرب حاصل د مشتق نیولو څخه په لاس راځي چې:

$$\frac{d}{dt}[\mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}(t)] = \frac{d}{dt}\sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i(t)=\sum_{i=1}^{3}\frac{d}{dt}[f_i(t)g_i(t)]$$

$$=\sum_{i=1}^{3}[f_i'(t)g_i(t) + f_i(t)g_i'(t)]$$

$$=\sum_{i=1}^{3} f_i'(t)g_i(t) + \sum_{i=1}^{3} f_i(t)g_i'(t)$$
$$= \mathbf{u}'(t) \cdot \mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t) \cdot \mathbf{v}'(t) \ \blacksquare[12]$$

19. مثال

که $|\boldsymbol{r}(t)| = c$ (constant) وي ، وښیی چې $\mathbf{r}(t)$ په $\mathbf{r}'(t)$ باندې عمود دی.

حل

پوهیږو چې $\mathbf{r}(t)\cdot\ \mathbf{r}(t)=|\mathbf{r}(t)|^2 = c^2$ او c^2 ثابت دی نو د $\mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}(t)$ مشتق د صفر سره مساوي دی. یعنې

$$0=\frac{d}{dt}\left[\ \mathbf{r}(t)\cdot\ \mathbf{r}(t)\right] = \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) + \mathbf{r}(t)\cdot\mathbf{r}'(t) =$$

$$=2\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) \Rightarrow \mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) =0$$

دا چې $\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}(t) = 0$ دی په نتیجه کې $\mathbf{r}(t)$ په $\mathbf{r}'(t)$ عمود دی.

5. د وکتوري توابعو انتیګرال ، د قوس اوږدوالی او کوږوالی

a) د وکتوري توابعو انتیګرال

سره ددې چې د وکتوري توابعو انتیګرال یو وکتور دی ، بیا هم د وکتوري توابعو انتیګرال د حقیقي توابعو د انتیګرال په شان په لاس راوړلی شو. یوازې فرق په دې کې دی چې د وکتوري توابعو انتګرال د هغې د مرکبو انتیګرال سره مساوي دی یعنې:

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}(t_i^*)\Delta t$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n} f(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{i} + \lim_{n\to\infty}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} g(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{j} + \lim_{n\to\infty}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} h(t_i^*)\Delta t\right)\mathbf{k}\right]\right.$$

په نتجه کې لیکو چې

$$\int_a^b \mathbf{r}(t)dt = \left(\int_a^b \mathbf{f}(t)dt\right)\mathbf{i} + \left(\int_a^b \mathbf{g}(t)dt\ \right)\mathbf{j} + \left(\ \int_a^b \mathbf{h}(t)dt\right)\mathbf{k}$$

b) د قوس اوږدوالی (Arc length)

په **6.** فصل کې مو درته وښودل چې په مستوي کې د یوې منحني د قوس اوږدوالی چې پارامتریکې معادلې یې د $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ په انترول کې د اشتقاق وړ او متمادي وي، د لاندې فرمول په واسطه پیدا کولی شو:

$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\ dt=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\ dt \quad \dots \qquad (13)$$

د پورته په شان که یوه منحني په فضا کې راکړل شوي وي داسې چې د $[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ په انترول کې یې د منحني وکتوري معادله $\mathbf{r}(t)=\langle f(t), g(t), h(t)\rangle$ اود هغې د پارامتریکې معادلو $(z=h(t), y=g(t), x=f(t))$ مشتقات(h', g', f') موجود او متمادي وي، په دې صورت کې که د منحني اوږدوالی د a نه **څخه** تر b

پورې د t په زیاتیدو یو ځل بشپړ شي ،نو د منحني اوږدوالی د a څخه تر b پورې د لاندې فرمول په واسطه معلومولی شو :

$$L=\int_a^b \sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}\,dt$$

$$=\int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \quad \dots \qquad (14)$$

(13) او (14) فرمولونه دواړه د منحني دقوس اوږدوالي فرمولونه دي او دواړه فرمولونه په لنډه توګه په لاندې ډول لیکو :

$$L=\int_a^b |\mathbf{r}'(t)|\,dt \qquad \dots \qquad (15)$$

ځکه چې په مستوي کې د منحني له پاره د یوې نقطې د موقعیت وکتور $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}$ دی او

$$|\mathbf{r}'(t)|=|f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}|=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2}$$

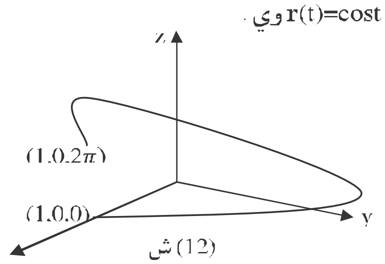
کیږي. په فضا کې د منحني د یوې نقطې له پاره د موقعیت وکتور $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ دی او

$$|\mathbf{r}'(t)|=|f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}|=\sqrt{[f'(t)]^2+[g'(t)]^2+[h'(t)]^2}$$

کیږي .

20. مثال

د یو دایروي هېلکس اوږدوالی د $(1,0,0)$ نقطې څخه تر $(1,0,2\pi)$ نقطې پورې پیدا کړی، په هغه صورت کې چې د هېلکس وکتوري معادله $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$ وي .



ش (12)

حل

$$\mathbf{r}'(t)=-\sin t\,\mathbf{i}+\cos t\,\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$|r'(t)|=\sqrt{(-\sin t)^2+(\cos t)^2+1}=\sqrt{2}$$

دلته د قوس اوږدوالی د (1,0,0) نقطې څخه تر $(1,0,2\pi)$ نقطې پورې د $0\leq t \leq 2\pi$ د t پارامتر پورې اړه لري . ليکو چې :

$$L=\int_0^{2\pi}|\mathbf{r}'(t)|\, dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2}\, dt = 2\sqrt{2}\pi \quad .$$

د C منحني د يو ې وکتوري معادلې څخه پرته ،د زياتو وکتوري معادلو په واسطه هم ښودل کيږي . د مثال په توګه که د C منحني وکتوري معادله

$$\mathbf{r}_1(t) = \langle t, t^2, t^3\rangle \quad ; 1\leq t \leq 2 \qquad \ldots \qquad (16)$$

وي ، لاندې وکتوري معادله هم د C منحني وکتوري معادله ده .

$$\mathbf{r}_2(t) = \langle e^u, e^{2u}, e^{3u}\rangle \quad ; 0\leq u \leq ln2 \qquad \ldots \qquad (17)$$

په دې حالت کې د (16) او(17) معادلو ته د C منحني پارامتري معادلې ويل کيږي او په دواړو حالتونو کې د C منحني له پاره د قوس اوږدوالی په مساوي ډول په لاس راځي .اوس که د C منحني وکتوري معادله د $a\leq t \leq b$ په انټرول کې $\mathbf{r}(t)=f(t)\mathbf{i}+g(t)\mathbf{j}+h(t)\mathbf{k}$ او $\mathbf{r}'(t)$ متمادي وي، په دې صورت کې د منحني د قوس اوږدوالي تابع(s) د a څخه تر b پورې په هغه صورت کې چې t يو ځلې د a څخه تر b پورې زياتوالی وکړي، په لاندې ډول تعريف کوو :

$$s(t):=\int_a^t|\mathbf{r}'(u)|\, du = \int_a^t \sqrt{(\frac{dx}{du})^2 + (\frac{dy}{du})+(\frac{dz}{du})^2} \quad du \qquad \ldots \qquad (18)$$

دلته s(t) د منحني د يوې برخې اوږدوالی د $\mathbf{r}(a)$ څخه تر $\mathbf{r}(t)$ او

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| \qquad \ldots \qquad (19)$$

21. مثال

د $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ وکتوري معادله ،د قوس د اوږدوالي له جنسه د (1,0,0) نقطې څخه د t پارامتر د تزايد په جهت پارامتري کړی .

حل

د هېلکس د شروع نقطه(1,0,0) د t پارامتر د **t=0** په قېمت پورې اړه لري . د **20.** مثال څخه لرو چې

$$\frac{ds}{dt} = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2} \quad .$$

$$s=s(t)=\int_0^t |\mathbf{r}'(u)|\,du=\int_0^t \sqrt{2}du=\sqrt{2}t \Rightarrow t=\frac{s}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow t(s)=\frac{s(t)}{\sqrt{2}}$$

دلته که $t = s/2$ وضع کړو د C منحني د قوس اوږدوالي له جنسه ، پارامتر ایز معادله په لاندې توګه حاصلیږي

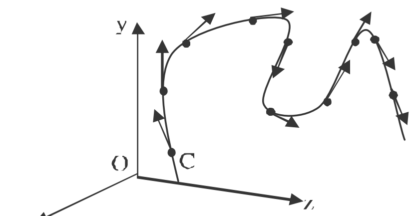
$$\Rightarrow \mathbf{r}\big(t(s)\big)=\cos\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{i}+\sin\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathbf{k}$$

c) د منحني کوږوالی (Curvature)

مخکې له دې چې د منحني په کوږوالي باندې و غږیږو ، یو څه اضافي معلومات د منحني په اړه درته وړاندې کوم .هغه دادي چې : د $\mathbf{r}(t)$ پارامتري معادلې ته د I په انترول کې هوار (**smooth**) ویل کیږي که $\mathbf{r}'$ په I کې متمادي او $r'(t)\neq 0$ وي .

یوې منحني ته هواره منحني ویل کیږي که هغه هوار پارامتري معادلې ولري. هواره منحني په ښکاره توګه کونج نه لري او مماسي خطونه په هغې باندې په متمادي توګه دوران کوي .نو که د C هوارې منحني وکتوري معادله راکړل شوې وي د هغې له پاره واحد وکتور ($\mathbf{T(t)}$) چې د منحني جهت ټاکي ، د

$\mathbf{T}(t):=\frac{r'(t)}{|r'(t)|}$ رابطې په واسطه تعریف کوو :(13) ش



(13)ش

د شکل څخه معلومیږي چې د $\mathbf{T(t)}$ جهت ،په هغه صورت کې چې C لږ څه مستقیم وي دېر ورو ورو تغیر کوي، او که منحني کږه او یا تېرې څوکې ولري په دې صورت کې د $\mathbf{T}(t)$ د جهت تغیر ډېر ګړندی کیږي.

د C منحني کوږوالی، د منحني په یوه نقطه کې د جهت د تغیر د ګړندیتوب درجه راښیي، یعنې د واحد مماسي وکتور د تحول مقدار نظر د قوس اوږدوالي په یوه واحدد طول کې دی . دا چې دلته د قوس اوږدوالی په نظر کې نیول شوی دی نو کوږوالی په پارامتر ازېښن پورې اړه نه لري او داسې یې تعریف کوو

4.10 تعریف

که T د منحني واحد مماسي وکتور وي ، د منحني کوږوالی په لاندې توګه تعریف کوو :

$$K := \left|\frac{\mathbf{dT}}{\mathbf{ds}}\right| \qquad \ldots \qquad (20)$$

د کوږوالي محاسبه د t پارامترته ،نظر د قوس اوږدوالي ته ډېره اسانه ده او د محاسبې له پاره يې د مشتق د زنځيري قاعدې څخه کار اخلو .ليکو چې :

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d\mathbf{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} \quad \wedge \quad k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{\frac{\mathbf{dT}}{\mathbf{dt}}}{\frac{ds}{dt}}$$

دا چې د (19) رابطې له مخې $|\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt}$ دی، نو

$$k(\mathrm{t}) = \frac{|\mathbf{T}'(\mathrm{t})|}{|\mathbf{r}'(\mathrm{t})|} \qquad \ldots \qquad (21)$$

22. مثال

يوه دايره د a په شعاع راکړل شوي ده . ثبوت کوو چې د دايرې کوږوالی(k) د $\frac{1}{a}$ سره مساوي دی .

حل

د کار د اسانی له پاره د دايرې مرکز په مبدا کې نيسو ، او د دايرې معادله پارامترايز کوو يعنې د دايرې معادله په لاندې ډول ليکو :

$$\mathbf{r}(t) = a \cos t\, \mathbf{i} + a \sin t\, \mathbf{j}$$

همدارنگه پوهيږو چې $\mathbf{r}'(t) = -a \sin t\, \mathbf{i} + a \cos t\mathbf{j}$ او $|\mathbf{r}'(t)| = a$ دی، نو

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = -sint\, \mathbf{i} + cost\mathbf{j} \Rightarrow \boldsymbol{T}'(t) = -cost\, \mathbf{i} - sint\, \mathbf{j}$$

$$\Rightarrow |\boldsymbol{T}'(t)| = \mathbf{1}$$

نو د (21) معادلې له مخې ليکو چې :

$$k(\mathbf{t}) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{1}}{a}$$

د پورتني مثال څخه نتيجه اخلو چې ،کوچنی دايره د لوی کوږوالي او لويه دايره د کوچني کوږوالي لرونکي ده .

3.10 دعوی

که د يوې منحني وکتوري معادله $\mathbf{r}(t)$ راکړل شوي وې ،کوږوالی يې د

$k(t)=\frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ … (22)

سره مساوي دی .

ثبوت

څرنګه چې $\mathbf{T}=\frac{\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}'|}$او $|\mathbf{r}'| = \frac{ds}{dt}$ دی. لیکو چې :

$$\mathbf{r}' = |\mathbf{r}'|\boldsymbol{T} = \frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}$$

نو د مشتق د ضرب قاعدې له مخې لرو چې :

$$\mathbf{r}'' = \frac{d^2s}{dt^2}\boldsymbol{T} + \frac{ds}{dt}\boldsymbol{T}'$$

څرنګه چې $\mathbf{T}\times \boldsymbol{T} = 0$ کیږي. نو

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = (\frac{ds}{dt})^2(\mathbf{T} \times \mathbf{T}') .$$

همدارنګه پوهیږو چې د هر $t\in \mathbb{R}$ له پاره $|\mathbf{T}(t)| = 1$ دی او د 19. مثال له مخې $\mathbf{T}$ په $\mathbf{T}'$ باندې عمود دی او د وکتوري ضرب په نظر کې نیولو سره لیکو چې :

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = (\frac{ds}{dt})^2|\mathbf{T} \times \mathbf{T}'| = (\frac{ds}{dt})^2|\boldsymbol{T}||\boldsymbol{T}'| = (\frac{ds}{dt})^2|\mathbf{T}'|$$

$$\Rightarrow |\mathbf{T}'| = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{(\frac{ds}{dt})^2} = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^2}$$

$$\Rightarrow k = \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{r}'\times\mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} \qquad \blacksquare \quad .$$

23. مثال

د $\mathbf{r}(t)=\langle t, t^2, t^3\rangle$ تاو شوي(twisted) مکعبي منحني کوږوالی په اختیاري نقطه او همدارنګه د (0,0,0) نقطه کې پیدا کړی .

حل

د منحني د کوږوالي د پیدا کولو له پاره، اول هغه څه چې ضرور دي پیدا کوو. نو لیکو چې :

$$\mathbf{r}'(t) = \langle 1,2t, 3t^2\rangle \quad ; \ \mathbf{r}''(t) = \langle 0,2,6t\rangle$$

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{1 + 4t^2 + 9t^4}$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t\,\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{36t^4 + 36t^2 + 4} = 2\sqrt{9t^4 + 9t^2 + 1}$$

د 3.10 دعوې له مخې لرو چې :

$$k(t) = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3} = \frac{2\sqrt{9t^4+9t^2+1}}{(1+4t^2+9t^4)^{\frac{3}{2}}}$$

څرنګه چې په مبدا (0,0,0) کې $t=0$ دی او کوږوالی $k(0)=2$ کیږي .

نوټ

په سطح کې د خصوصي حالتونو له پاره که د $y=f(x)$ منحني په نظر کې ونیول شي ، نو د کار د اسانی له پاره د پارامتر په توګه x قبلوو او $\mathbf{r}(x)=x\mathbf{i}+f(x)\mathbf{j}$ کیږي.ددې څخه $\mathbf{r}'(x) = \mathbf{i} + f'(x)\mathbf{j}$ او $\mathbf{r}''(x) = f''(x)\mathbf{j}$ په لاس راځي. څرنګه چې $\mathbf{i}\times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ او $\mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}$ کیږي. لیکو چې :

$$\mathbf{r}'(x) \times \mathbf{r}''(x) = f''(x)\,\mathbf{k}\,.$$

دا هم لرو چې $|\mathbf{r}'(x)| = \sqrt{1 + [f(x)]^2}$.نو د 3.10 دعوې له مخې لیکو چې :

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{|1+(f'(x))^2|^{\frac{3}{2}}} \qquad .... \qquad (23)$$

24. مثال د $y=x^2$ د منحني کوږوالی د (0,0)، (1,1) او (2,4) نقطو کې پیدا کړی .

حل

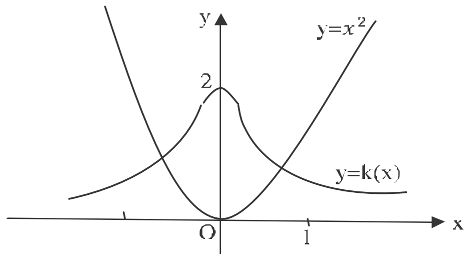
څرنګه چې $y' = 2x$ ، $y'' = 2$ دی، او د (23) رابطې له مخې لرو چې:

$$k(x) = \frac{|y''|}{[1+(y')^2]^{\frac{3}{2}}} = \frac{2}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

د منحني کوږوالی په (0,0) کې $k(0)=2$ په (1,1) کې $k(1)=\frac{2}{5^{\frac{3}{2}}} \approx 0.18$ او په (2,4) کې د $k(2)$ قیمت د

$k(2)=\frac{2}{17^{\frac{3}{2}}} \approx 0.03$ دی .

د $k(x)$ افادې څخه معلومیږي چې د $x\to\infty$ په حالت کې $k(x)\to 0$ کیږي .نو ددې حقیقت له مخې وایو چې د پارابول کوږوالی د x په زیاتیدو سره د هوارۍ په لور درومي.



(14) ش

6. نورمال اودوه ایز(بای نورمال) وکتورونه (Normal and Binormal vectors)

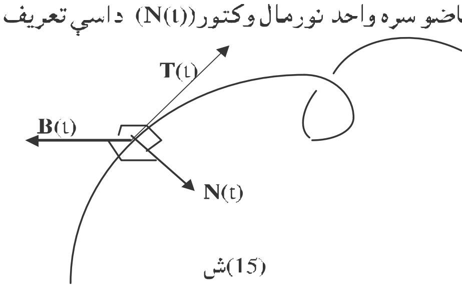
پوهیږو چې دفضا د $\mathbf{r}(t)$ هوارې منحنی د P په یوه نقطه کې ،یو شمېر زیات وکتورونه شته چې په واحد مماسي وکتور$\mathbf{T}(t)$ باندې د اورتو ګونال(عمود) خاصیت لري او د هغې له جملې څخه یو $\mathbf{T}'(t)$ دی. دا هم پوهیږو چې د هر t له پاره$\mathrm{T}(t)\cdot\mathrm{T}'(t) = 0$; $|\mathrm{T}(t)| = 1$ او$\mathrm{T}(t)$ په$\mathrm{T}'(t)$ باندې عمود دی .ځکه چې

$$\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t) = |\mathbf{T}(t)|^2 = 1$$

$$(\mathbf{T}(t)\cdot\mathbf{T}(t))' = 2\mathbf{T}'(t)\cdot\mathbf{T}(t) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbf{T}'(t) \perp \mathbf{T}(t) \ .$$

دا هم باید زیاته کړو چې په خپله$\mathbf{T}'(t)$ واحد وکتور نه دی او$\boldsymbol{r}'(t)$ هوار خاصیت لري ، نوموړ اساسي نورمال واحد وکتور یا په ساده الفاضو سره واحد نورمال وکتور($\mathbf{N}(t)$) داسې تعریف کوو :



ش(15)

$\mathbf{N}(t) := \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}$او$\mathbf{B}(t)=\mathbf{T}(t)\times\mathbf{N}(t)$ وکتورته بای نورمال (یا دوه ایز نورمال)ویل کیږي، چې په$\mathbf{T}$ او $\mathbf{N}$ دواړو باندې عمود دی .

25. مثال

د$\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\mathbf{k}$ هېلکس له پاره $\mathbf{N}$ او $\mathbf{B}$ پیدا کړی .

حل

خپل مطلب ته د رسیدو له پاره لرو چې :

$$\mathbf{r}'(t) = -sint\ \mathbf{i} + cost\ \mathbf{j} + \mathbf{k} \ \ : \ |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{2}$$

$$\mathbf{T}(t)=\frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-sint\ \mathbf{i} + cost\ \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

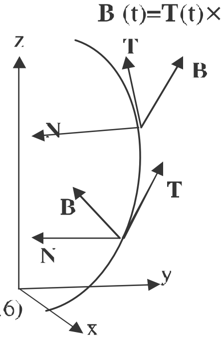
$$\mathbf{T}'(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-cos\ t\ \mathbf{i} - sin\ t\ \mathbf{j})\ ;\ |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{N}(t)=\frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = -cos\ t\ \mathbf{i} - sin\ t\ \mathbf{j} = \langle -cos\ t\ \mathbf{i}, -sin\ t\ \mathbf{j}\ , 0\rangle \quad .$$

له دې ځایه معلومیږي ،چې د هېلکس په یوه نقطه کې نورمال وکتور ،یو افقي خط دی چې جهت یې د z محور په طرف دی .او بای نورمال وکتور یې د

$$\mathbf{B}\ (t)=\mathbf{T}(t)\times \mathbf{N}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -sint & cost & 1 \\ -cost & -sint & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\langle sint, -cost\ ,1\rangle$$

څخه عبارت دی .



(16) ش

هغه مستوي چې د C منحني د N اوB په واسطه دP په نقطه کې حاصلیږي، دC د نورمال مستوي (normal plane) په نوم یادیږي .دامستوي د هغو خطونوڅخه جوړه شوې ده چې په مماسي وکتور(T) باندې عمود دي . هغه مستوي چې د T اوN په واسطه دC په منحني دP په نقطه کې ټاکل کیږي دتماسي مستوي یعنې د (osculating plane) په نوم یادیږي. دا مستوي، P ته په ډېرو نږدې قېمتوکې د منحني یوه برخه په ځان کې لري . د یوې منحني له پاره چې په یوه مستوي کې پرته وي په خپله همغه مستوي د هغې منحني له پاره تماسي مستوي ده .دا هم باید زیاته کړوچې هغه دایره چې د تماسي مستوي د P په نقطه کې دC منحني په مقعر لوري کې ، دC منحني سره شریک مماس لري د کوږوالي دایرې په نوم یادیږي چې شعاع یې $\rho = \frac{1}{k}$ د(کوږوالي معکوس)سره مساوي کیږي . یعنې د ا دایره د منحني خصوصیات د P نقطې په اطرافو کې په ښه وجه څرګندولی شي .

26. مثال

د 25. مثال څخه د نورمال اوتماسي مستوي معادلې د $P(0,1,\frac{\pi}{2})$ په لاس راوړی .

حل

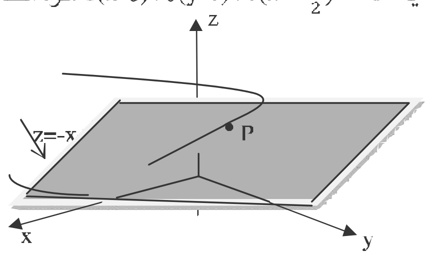
دنورمال مستوي له پاره نورمال وکتورد P په نقطه کې د $r'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle -1,0,1\rangle$ څخه عبارت دی ، چې یوه معادله یې په لاندې ډول ده :

$$-1(x-0)+0(y-1)+1(z-\frac{\pi}{2}) = 0 \quad \text{یا} \quad z = x + \frac{\pi}{2} \quad .$$

دا چې د P په نقطه کې تماسي مستوي د T او N وکتورونه په ځان کې لري، نو له دې وجې د هغې نورمال وکتور $B = T\times N$ دی. د مثال په توګه د 25. مثال څخه لرو چې

$$B(t)= \frac{1}{\sqrt{2}}\langle sint, -cost, 1\rangle \qquad B\left(\frac{\pi}{2}\right) = \langle\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\rangle \quad .$$

دا هم ښکاره ده چې د تماسي مستوي له پاره د $\langle 1,0,1\rangle$ وکتور هم یو ساده نورمال وکتور دی، نو د تماسي مستوي معادله یې د $1(x-0)+0(y-1)+1(z-\frac{\pi}{2}) = 0$ یا $z = -x + \frac{\pi}{2}$ سره مساوي ده .



ش(17)

27. مثال

د $y=x^2$ پارابول له پاره په مبدا کې د تماسي داېرې ګراف رسم کړی .

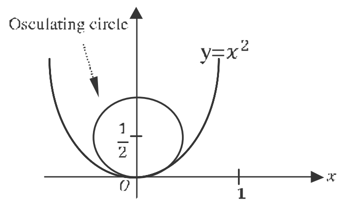
حل

د پارابول کوږوالی د 24. مثال له مخې په مبدا کې $k(0)=2$ دی. نو د مماسي دایرې شعاع $\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ او مرکز یې $(0,\frac{1}{2})$ دی. له دې وجې لیکو چې :

$$x^2 + (y-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4} \quad .$$

د ګراف رسمولو له پاره، د پورتنی معادلې د پارامتریکې معادلو څخه کار اخلو ، لرو چې :

$x = \frac{1}{2}\ cost\ ,\ \ y = \ \frac{1}{2} + \ \frac{1}{2}\ sint$



(18) ش

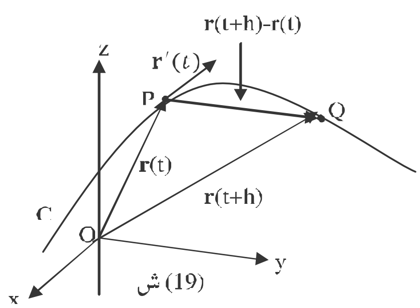
په دې ځای کې موږ د واحد مماسي، واحد نورمال، بای نورمال وکتورونو او د کوږوالي فرمولونه په لاندې توګه خلص کوو :

$$\mathbf{T}(t) := \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}\ ,\quad \mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|}\ ,\quad \mathbf{B}(t) = \mathbf{T}(t) \times \mathbf{N}(t)\ ,$$

$$k = \left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{|\mathbf{r}'(t) \times \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$$

حرکت په فضا کې (سرعت او تعجیل)

دلته به ولیدل شي چې په فضا کې د جسمونو د حرکت د مسیر په مطالعه کې ، د کوږوالي، نورمال او بای نورمال مفهومونو څخه څنګه ګټه اخیستلی شو . په خاصه توګه به دا هم دروښودل شي چې د نیو ټن د قوانینو په نظر کې نیولو سره د کیپلر(Kepler) داول دوهم او دریم قانون فرمولونه ،چې په فضا کې د ستورود حرکت مسیر موږ ته رابنیي ، څنګه په لاس راغلي دي . ددې مطلب له پاره فرضوو چې یوه ذره په فضا کې د حرکت په حال کې ده او د هغې د موقعیت وکتور د t په وخت کې $\mathbf{r}(t)$ دی .



(19) ش

همدارنګه (19) ش څخه معلومیږي چې د h په کوچني قیمت کې د

$$\frac{\mathbf{r}(t+h) - \mathbf{r}(t)}{h} \qquad \ldots \qquad (24)$$

وکتور ، د ذرې د حرکت جهت د r(t) په منحني باندې تخمين کوي. چې مقدار يې د خای نيونې وکتور (displacement) سره په يوه واحد د وخت کې مساوي دی . يعنې

$$\mathbf{v}(t)=\lim_{h\to\infty}\frac{\mathbf{r}(t+h)-\mathbf{r}(t)}{h}=\mathbf{r}'(t) \qquad \ldots \qquad (25)$$

چې په دې ترتيب د سرعت وکتور هم يو مماسي وکتور دی او د مماسي خط جهت لري ،چې مقدار يې $|\mathbf{v}(t)|$ دی او دا د t په وخت کې د تېزوالی(speed) مفهوم لري .

$$\text{تېزوالی} = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \frac{ds}{dt} \quad .$$

همدا شان د يو بعده حرکتونو په حالت کې د جسم د حرکت تعجيل د سرعت د مشتق په شکل تعريف کيږي. يعنې : $\mathbf{a}(t)=\mathbf{v}'(t)=\mathbf{r}''(t)$.

28. مثال

په يوه مستوي کې د يو متحرکت جسم د موقعيت وکتور $\mathbf{r}(t)=t^3\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}$ راکړل شوی دی. د $t=1$ وخت کې د جسم سرعت ،تيزي(**speed**) ، او تعجيل پيدا کړی.اوهم يې په هندسي ډول واضح کړی .

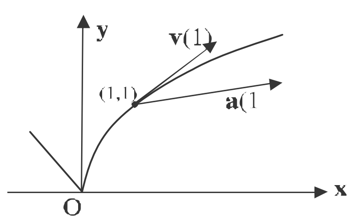
حل

د حرکت ،سرعت او تعجيل معادلې دا په وخت کې

$\mathbf{v}(t)=\boldsymbol{r}'(t)=3t^2\,\mathbf{i}+2t\,\mathbf{j}$

$\mathbf{a}(t)=\boldsymbol{r}''(t)=6t\,\mathbf{i}+2\,\mathbf{j}$

اود سرعت دتېزي معادله $|\mathbf{v}(t)|=|\mathbf{r}'(t)|=\sqrt{(3t^2)^2+4t^2}$ څخه عبارت دي. که t=1 شي نو $\mathbf{v}(1)=3\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ ،$\mathbf{a}(1)=6\mathbf{i}+2\mathbf{j}$ او $|\mathbf{v}(1)|=|\mathbf{r}'(1)|=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$ کيږي .په(20) ش کې د سرعت او تعجيل وکتورونه په ښکاره ليدل کيږي .



(20) ش

29. مثال

د يو جسم د موقعيت وکتور $\mathbf{r}(t)=\langle t^2, e^t, te^t\rangle$ دی. سرعت ، تېزي ، او تعجيل يې پيدا کړی .

حل

$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t) = \langle 2t, e^t, (1+t)e^t \rangle$

$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \langle 2, e^t, (2+t)e^t \rangle$

$|\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{4t^2 + e^{2t} + (1+t)^2 e^{2t}}$

نو که چېرې د متحرک جسم د سرعت او تعجیل وکتورونه راته معلوم وي د انتیګرال ګیری په واسطه کولی شو چې د جسم د موقعیت وکتور معادله په لاس راوړو .

30. مثال

یومتحرک جسم د خپل اولي موقعیت یعني د $\mathbf{r}(0)=\langle 1,0,0 \rangle$ څخه د $\mathbf{v}(0)=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$ اولیه سرعت په لرلو سره د $\mathbf{a}(t)=4t\mathbf{i}+6t\mathbf{j}+\mathbf{k}$ په تعجیل حرکت کوي . د جسم سرعت او تعجیل د t په وخت کې پیدا کړی .

حل

پوهیږو چې $\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t)$ دی نو

$\mathbf{v}(t)=\int \mathbf{a}(t)dt = \int (4t\,\mathbf{i} + 6t\,\mathbf{j} + \mathbf{k})dt$

$=2t^2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{c}$

دثابت وکتور c د معلومولو له پاره $\mathbf{v}(0)=\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ څخه کار اخلو ، اود پورتنی معادلې څخه په لاس راځي چې

$\mathbf{v}(0)=\mathbf{c} \Rightarrow \mathbf{c} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

او

$\mathbf{v}(t)= 2t^2\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k} + \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$=(2t^2+1)\,\mathbf{i} + (3t^2-1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}$

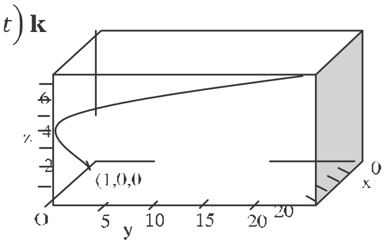
دا چې $\mathbf{v}(t)= \mathbf{r}'(t)$ دی لرو چې:

$\mathbf{r}(t)=\int [(2t^2+1)\mathbf{i} + (3t^2-1)\mathbf{j} + (t+1)\mathbf{k}]dt$

$=(\frac{2}{3}t^3 + t)\,\mathbf{i} + (t^3 - t)\mathbf{j} + \left(\frac{1}{2}t^2 + t\right)\mathbf{k} + \mathbf{D}$

که $t = 0$ وضع کړو ، مومو چې $\mathbf{D}=\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}$ کیږي . په نتیجه کې د موقعیت وکتور د t په وخت کې دلاندې معادلې لرونکی دی .

$$r(t)=\left(\frac{2}{3}t^3+t+1\right)\mathbf{i}+(t^3-t)\mathbf{j}+\left(\frac{1}{2}t^2+t\right)\mathbf{k}$$



ش (21)

په عمومي توګه که تعجیل راکړل شوی وي د انتیګرال په واسطه سرعت او که سرعت راکړل شوی وي د انتیګرال په واسطه د جسم د موقعیت وکتورپیدا کولی شو .یعنې

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{v}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\mathbf{a}(u)du \quad ; \quad \mathbf{r}(t)=\mathbf{r}(t_0)+\int_{t_0}^{t}v(u)du$$

31. مثال

یو جسم چې کتله یې m ده، په ثابت زاویوي سرعت(w) سره په دایروي مسیر باندې حرکت کوي داسې چې د موقعیت وکتور یې $\mathbf{r}(t)=a\cos\omega t\,\mathbf{i}+a\sin\omega t\,\mathbf{j}$ دی ..په هغې باندې د موثرې قوې مقدار پیدا کړی او همدارنګه وښیی چې د هغې جهت،د مبدا په طرف دی .

حل

د قوې د پیدا کولو له پاره اول تعجیل پیدا کوو ، لرو چې :

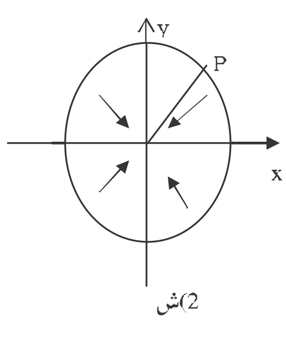
$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t)=-aw\,sin\omega t\,\mathbf{i}+a\omega\,cos\,\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\mathbf{a}(t)=v'(t)=-a\omega^2\,cos\,\omega t\,\mathbf{i}-a\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

نودنیوټن د دوهم قانون له مخې موثره قوه د

$$\mathbf{F}(t)=m\,\mathbf{a}(t)=-m\omega^2(a\cos\omega t\,\mathbf{i}+a\,sin\omega t\,j$$

څخه عبارت دی .

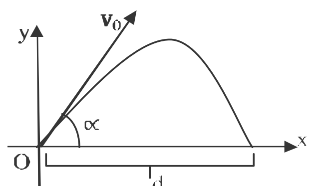


2)ش

معلومیږي چې $\mathbf{F}(t) = -mw^2(\mathbf{r}(t))$ دی. له دې معلومیږي چې قوه د موقعیت وکتور $(\mathbf{r}(t))$ په متضاد جهت عمل کوي . له دې وجې د قوې جهت د مبدا په لوري دی او مرکز ته د متمرکزې (*Centripral*) قوې په نوم یادیږي .

32. مثال

یوه مرمي د $\mathbf{v}_0$ په لومړني سرعت سره د $\propto$ زاویې لاندې پورته خواته په مایل ډول ښړل کیږي، (23)ش.فرضوو چې د هوا د مقاومت څخه پرته، یوازې د ځمکې جاذبه قوه عمل کوي .د مرمي له پاره د موقعیت وکتور $(\mathbf{r}(t))$ پیدا کړی او د $\propto$ په کوم قیمت سره به افقي فاصله اعظمي حالت غوره کړي .



ش (23)

حل

د اسانۍ له پاره فرضوو چې مرمي د مبدا څخه ښړل کیږي او دا چې د ځمکې له خوا جاذبه قوه په ښکته لور عمل کوي لیکو چې :

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = -mg\,\mathbf{j} \quad ; \quad g = |\mathbf{a}| \approx 9.8\ m/sec^2$$

نو $\mathbf{a} = -g\,\mathbf{j}$ دی . څرنګه چې $\mathbf{v}'(t) = \mathbf{a}$ کیږي لیکو چې :

$$\mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{C}$$

دا چې $\mathbf{C} = \mathbf{v}(0) = \mathbf{v}_0$ دی ، نو $\mathbf{r}'(t) = \mathbf{v}(t) = -gt\,\mathbf{j} + \mathbf{v}_0$ کیږي او ددې رابطې د انتګیرال څخه لاندې رابطه په لاس راځي .

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 + \mathbf{D}$$

څرنګه چې $\mathbf{D} = \mathbf{r}(0) = 0$ دی ،نو په نتیجه کې د موقعیت وکتور د

$$\mathbf{r}(t) = -\frac{1}{2}\,g\,t^2\,\mathbf{j} + t\,\mathbf{v}_0 \quad \ldots \qquad (26)$$

څخه عبارت دی.که موږ د مرمي اولیه سرعت $|\mathbf{v}_0| = v_0$ ولیکواو

$$\mathbf{v}_0 = v_0 \cos\propto \mathbf{i} + v_0 \sin\propto \mathbf{j}$$

حاصلیږي او (26) معادله لاندې شکل ځانته غوره کوي :

$$\mathbf{r}\,(t)=(\,v_0\,cos\,\propto)t\,\mathbf{i}+\left[(v_0\,sin\,\propto)t-\tfrac{1}{2}\,g\,t^2\right]\mathbf{j}\quad .$$

نو له دې وجې د مرمي د مسير پارامتريکې معادلې د

$$x=(\,v_0\,cos\,\propto)t\qquad;\qquad y=(v_0\,sin\,\propto)t-\tfrac{1}{2}\,g\,t^2\qquad\qquad (27)$$

څخه عبارت دي .

د افقي فاصلې له پاره د $y=0$ په حالت کې د d فاصله، x کيږي. نو د $y=0$ په وضع کولو سره $t=\frac{2v_0\propto}{g}$ يا $t=0$ په لاس راځي او د t د دوهم قيمت په نظر کې نيولو سره ليکو چې :

$$d=x=(\,v_0\,cos\,\propto)\,\frac{2v_0\propto}{g}=\frac{v_0^2(2sin\propto cos\propto)}{g}=\frac{v_0^2\sin 2\propto}{g}\,.$$

د پورتني معادلې څخه په څرګنده معلوميږي چې په $sin\,2\propto=1$ يعنې $\propto=\frac{\pi}{4}$ کې د d فاصله اعظمي حالت غوره کوي .

33. مثال

يوه مرمي د ځمکې څخه پورته خواته د $\propto=45^o$ زاويې لاندې په 150 m / sec په سرعت د 10m لوړوالي څخه شړل کيږي په ځمکه باندې د مرمی د لګيدو نقطه او سرعت پيدا کړی .

حل

که مورږ مبدا د ځمکې په سطح باندې و ټاکو ، نو د مرمی د شړل کيدو نقطه (0,10) کيږي او په(27) معادله کې که د y په عوض y+10 او همدا رنګه

$$g=9.8mm/sec^2,\propto=45^o,v_0=150m/sec$$

وضع کړو لاندې معادلې په لاس راځي:

$$x=150\cos(\tfrac{\pi}{4})t=75\sqrt{2}t$$

$$y=10+150\sin(\tfrac{\pi}{4})t-\tfrac{1}{2}(9.8)t^2=10+75\sqrt{2}t-4.9\,t^2$$

په ځمکه باندې دمرمي د لګيدو په نقطه کې y=0 يعنې $4.9t^2-75\sqrt{2}t-10=0$ کيږي او دا معادله يوازې د t مثبت قيمت له پاره حل کوو :

$$T=\frac{75\sqrt{2}+\sqrt{11.250+196}}{9,8}=\approx 21.74$$

چې د t په دغه قیمت سره$x \approx 75\sqrt{2}(21.74) \approx 2306$ حاصلیږي .یعنې مرمي د 2306 m په فاصله د ځمکې پر مخ لګیږي چې په دې وخت کې د مرمی سرعت د

$$\mathbf{v}(t)=\mathbf{r}'(t) = 75\sqrt{2}\,\mathbf{i} + \left(75\sqrt{2} - 9.8t\right)\mathbf{j}$$

سره مساوي دی او د سرعت تېزي یې

$$|v(21.74)| = \sqrt{(75\sqrt{2})^2 + (75\sqrt{2} - 9.8 \cdot 21.74)^2} \approx 151m/sec$$

کیږي .

د تعجیل مماسي او نورمال مرکبې

د اجسامو د حرکت په مطالعه کې ډېر وختونه دې ته اړتیا پیدا کیږي چې باید دتعجیل دوې مرکبې چې یوه یې د ټانجنټ او بله یې د نورمال جهت لري په نظر کې ونیول شي . نو ددې مطلب له پاره که د جسم د سرعت مقدار په $v=|\mathbf{v}|$ سره وښیو ،لیکو چې :

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v} = v\mathbf{T}$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{v}' = v'\mathbf{T} + v\mathbf{T}' \quad \ldots \qquad (28)$$

همدارنګه د کوږوالي(k) قیمت څخه پوهیږو چې :

$$k= \frac{|\mathbf{T}'|}{|\mathbf{r}'|} = \frac{|\mathbf{T}'|}{v} \Rightarrow |\mathbf{T}'| = kv \ \ldots. \qquad (29)$$

دا چې نورمال واحد وکتور $\mathbf{N}=\frac{\mathbf{T}'}{|\mathbf{T}'|}$ دی نو د (29) معادلې څخه

$$T' = |\mathbf{T}'|\mathbf{N} = kv\mathbf{N}$$

په لاس راځي او (28) رابطه لاندې شکل ځانته اختیاروي :

$$\mathbf{a} = v'\mathbf{T} + kv^2\mathbf{N} \quad \ldots \qquad (30)$$

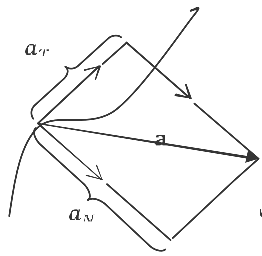
که د تعجیل مماسي او نورمال مرکبې په ترتیب سره په a_Tاوa_N سره وښیو لیکو چې :

$$\mathbf{a}=a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N}$$

په داسې حال کې چې

$$a_T = v' \quad \wedge \quad a_N = k\, v^2 \quad \dots \qquad (31)$$

سره مساوي دي . چې دا مفهوم په (24) ش په ښه توګه ليدل کيږي .



(24) ش

راځی وګورو چې (30) رابطه څه مفهوم لري ؟ . اول دا چې د جسم د حرکت د تعجيل مرکبې په فضا کې په بای نورما ل(**B**) وکتور پورې اړه نه لري ، دوهم دا چې تعجيل(**a**) د همېشه له پاره د **T** او N په مستوي يعنې په د تماسي مستوي کې پروت وي ،دلته بايد په ياد ولرو چې **T** دجسم د حرکت جهت اوN د منحني د دوران جهت راکوي). بل دا چې دتعجيل مماسي مرکبه(v') د تېزی د تغير مقدار او د تعجيل نورمال مرکبه (kv^2)د کوږوالي او د تېزي د مربع دضرب حاصل راښيي.دا په دې مفهوم ده چې که موږ په موټر کې ناست سړي ته فکر وکړو داسې چې دتېز حرکت په وخت کې که زيات دور وخوري ، دا د زيات دور خوړلو مفهوم د کوږوالي(کروېچر) معنی ورکوي. يعنې د تعجيل مرکبه چې د حرکت په جهت عمود ده لويه راځي او په موټر کې ناست سړی به د موټر د دروازې په جهت وشړل شي .دا مفهوم د موټر په ګړنديو سرعتونو کې ليدل کيږي او که د موټر سرعت دوه چنده شي د a_N مقدار به څلوور چنده زيات شي .

په (31) رابطه کې، سره له دې چې تعجيل له پاره مماسي او نورمال مرکبې پېژنو او ددې برسېره موږ کولی شو چې دا مرکبې د $\mathbf{r}',\mathbf{r}$ او $\mathbf{r}''$ له جنسه هم و ښيو .ددې مطلب له پاره د $\mathbf{v} = v\,\mathbf{T}$ سکالري ضرب د **a** سره تشکيلوو:

$$\mathbf{v}\cdot\mathbf{a} = v\mathbf{T}\cdot(v'T + kv^2\mathbf{N}) = vv'\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} + kv^2\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = vv'$$

څکه چې $\mathbf{T}\cdot\mathbf{N} = \mathbf{0}$ او $\mathbf{T}\cdot\mathbf{T} = \mathbf{1}$ کيږي .نو له دې وجې ليکو چې

$$\mathrm{a}_T = v' = \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}}{v} = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \dots \qquad (32)$$

همدارنګه پوهيږو چې $k = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}$ او

$$a_N = kv^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}|\mathbf{r}'(t)|^2 = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad \dots \qquad (33)$$

کیږي .

34. مثال

یو جسم د $\mathbf{r}(t)=\langle t^2, t^2, t^3\rangle$ تابع په اساس حرکت کوي .د تعجیل مماسي او نورمال مرکبې پیدا کړی .

حل

$\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i} + t^2\,\mathbf{j} + t^3\,\mathbf{k}$

$\boldsymbol{r}'(t) = 2t\,\mathbf{i} + 2t\,\mathbf{j} + 3t^2\,\mathbf{k}$

$\boldsymbol{r}''(t) = 2\,\mathbf{i} + 2\,\mathbf{j} + 6t\,\mathbf{k}$

$|\boldsymbol{r}'(t)| = \sqrt{8t^2 + 9t^4}$

$\overset{(32)}{\Longrightarrow}\ a_T = \frac{\mathbf{r}'(t)\cdot\mathbf{r}''(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{8t+18t^3}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$

دا چې $\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2t & 2t & 3t^2 \\ 2 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 6t^2\mathbf{i} - 6t^2\mathbf{j}$ کیږي نو د (33) رابطې له مخې لیکو چې:

$\boldsymbol{a}_N = \frac{|\mathbf{r}'(t)\times\mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{6\sqrt{2}t^2}{\sqrt{8t^2+9t^4}}$.

دګرځنده اسماني جسمونوله پاره د کېپلر قوانین

د پورتنیو معلوماتو مطالعه ،د کېپلر له پاره د ستوروپه حرکت کې ، دقوانینود پېژندنې له پاره یوه لویه لاس ته راوړنه وه. د*20* کالو مطالعې وروسته سوېډني نجومي عالم تیکو براهه *(Tcho Brahe)*او جرمني ریاضیدان کېپلر*(Kepler)* چې نجومي هم وه په(1571-1630)کال کې لاندې درې قوانین فرمول بندي کړل .

1- د ګرځنده اسماني ستورو څرخیدل دلمرپه چاپېر یو الیپتیکي مدار لري ، داسې چې یو محراق یې په لمر کې وي .

2- د لمر اوستوري تر منځ نښلوونکی خط په مساوي وختونو کې مساوي مساحتونه وهي .

3- دستوري دڅرخیدلو د پریود مربع ، د ستوري دمدارد اوږده قطر اوږدوالي د مکعب سره متناسب دی

د کېپلر قوانینو ثبوت.

اسحق نیوټن په خپل کتاب (Principia Mathematica) کې په دې پوهیده چې دا درې قوانین دده د دوو قوانینو(د نیوټن د حرکت دوهم قانون، د ځمکې د جاذبې قانون) نتیجه ده . په دې ځای کې موږ د نیوټن د قوانینو په نظر کې نیولو د وکتور په کارونه سره د کېپلر قوانین په ثبوت رسوو .[12]

څرنګه چې د لمر جاذبې قوه په ستورو باندې نظر د نورو سماوي جسمونو په مقایسه ډېره زیاته ده ، نو ځکه د نورو سماوي ستورو د جاذبې قوې په صرف نظر سره یوازې د لمر جاذبه قوه په نظر کې نیول شوې ده .دلته موږ دقطبي مختصاتو هغه سیستم په کاراچوو چې لمر یې په مبدا کې پروت وی یعنې د اېلپس محراق په مبدا کې دی . ددې مقصد له پاره فرضوو چې د سیوږمی د حرکت وکتوري معادله $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ ، د سرعت وکتوري معادله $\mathbf{v}=\mathbf{r}'$ او د تعجیل معادله یې $\mathbf{a}=\mathbf{r}''$ ده. نو د نیوټن د لاندېنیو قوانینو څخه کار اخلو :

د نیوټن د حرکت دوهم قانون: $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$

د نیوټن د ځمکې د جاذبې قانون : $\mathbf{F}= -\frac{GMm}{r^3}\mathbf{r}$

په داسې حال کې چې $\boldsymbol{F}$ د جاذبې قوه په سیوږمی باندې، m او M د سیوږمی او لمر کتلې ، $\boldsymbol{G}$ د جاذبې ثابت ، $r=|\mathbf{r}|$ او $\mathbf{u}=\frac{1}{r}\mathbf{r}$ د $\mathbf{r}$ په جهت واحد وکتور دی .

i) دکېپلر اول قانون

اول دا ښیو چې د سیوږمی حرکت(مدار) په یوه مستوي کې دی.ددې مطلب د حاصلولو له پاره د نیوټن د پورتنیو دوو قوانینو د تساوي څخه د F له پاره مومو چې:

$$\mathbf{a} = -\frac{GM}{r^3}\mathbf{r}$$

د پورتنی رابطې څخه پوهیږو چې $\mathbf{a}$ او $\mathbf{r}$ سره موازي دي یعنې $\mathbf{r}\times\mathbf{a} = 0$ کیږي . لیکو چې :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times\mathbf{v}) = \mathbf{r}'\times\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{v}' = \mathbf{v}\times\mathbf{v}+\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \mathbf{r}\times\mathbf{v} = \mathbf{h} \quad .$$

دلته فرضوو چې $\mathbf{h}\neq\mathbf{0}$ یو ثابت وکتور دی . یعنې $\mathbf{r}$ او $\mathbf{v}$ سره موازي نه دي او دا ددې مفهوم لري چې $\mathbf{r}$ د t په ټولو قیمتونو کې په $\mathbf{h}$ باندې عمود دی .بنا پردې سیوږمی د همېشه له پاره په هغه مستوي کې

پرته ده چې د مبدا څخه تېرېږي او په **h** باندې عمود وي .نو ځکه د سپوږمی مدار د مستوي يوه منحني (**plane curve**) ده. د کېپلرد اول قانون د ثبوت له پاره د **h** وکتور د دوهم ځل له پاره په لاندې توګه ليکو:

$$\mathbf{h}=\mathbf{r}\times \mathbf{v} = \mathbf{r}\times\mathbf{r}' = r\,\mathbf{u}\times(r\mathbf{u})'$$

$$= r\mathbf{u}\times(r\mathbf{u}' + r'\boldsymbol{u}) = r^2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}') + \mathrm{r}r'(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u})$$

$$= r^2(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}')$$

نو

$$\mathbf{a}\times\boldsymbol{h} = \frac{-GM}{r^2}\boldsymbol{u}\times(\,r^2\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}') = -GM\boldsymbol{u}\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{u}')$$

په نتيجه کې د **4.9** دعوې د **6.** خاصيت له مخې ليکو چې:

$$\mathbf{a}\times\boldsymbol{h} = -\,\mathrm{GM}[(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u}')\boldsymbol{u} - (\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}'\,] \quad .$$

همدارنګه $|\boldsymbol{u}|^2 = 1$ $\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{u} =$.کيږي ،ځکه چې $|\boldsymbol{u}(t)| = 1$ سره دی . همدارنګه د **19.** مثال له مخې پوهيږو چې$\mathrm{u}\cdot\boldsymbol{u}' = 0$ کيږي نو له دې وجې څخه $\mathrm{a}\times\boldsymbol{h} = GM\boldsymbol{u}'$ بناپردې لرو چې :

$$(\mathbf{v}\times\mathbf{h})' = \mathbf{v}'\times\mathbf{h} = \mathbf{a}\times\mathbf{h} = \mathrm{GM}\boldsymbol{u}'$$

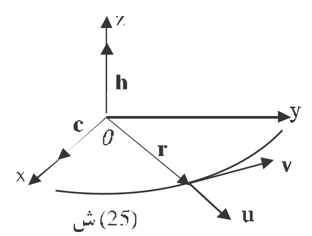
د پورتنی معادلې د دواړو د انتيګرال څخه د

$$\mathbf{v}\times\mathbf{h} = \mathrm{GM}\,\boldsymbol{u} + \mathbf{c} \quad ; \quad \text{يو ثابت وکتور دی } \mathbf{c} \;\dots\dots \qquad (34)$$

په لاس راځي .

په دې ځای کې موږ د مختصاتو محورونه داسې انتخاب کووچې په هغې کې د **k**واحد وکتورد **h** وکتور جهت ولري .نو له دې معلوميږي چې ستوری د xy– په مستوي کې حرکت کوي ،ځکه چې **v× h** او **u** دواړه په **h** باندې عمود او (34) معادله راښيي چې $\boldsymbol{c}$ د xy– مستوي کې پروت دی .

دا په دې معنی چې د x اوy محورونه داسې انتخاب کولی شو چې د $\boldsymbol{i}$ وکتوردc په جهت باندې راشي (25)ش.



ش (25)

دلته د **r** او**c** تر منځ زاویهθ ده ، نو د سپوږمی قطبي مختصات (r,θ) کیږي او د (34)معادلې څخه لرو چې:

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = \mathbf{r}\cdot(GM\mathbf{u}+\mathbf{c}) = GM\mathbf{r}\cdot\mathbf{u}+\mathbf{r}\cdot\mathbf{c} \quad ; \mathbf{c}=\text{constant vector}$$

$$=\text{GMr}\mathbf{u}\cdot\mathbf{u} + |\mathbf{r}||\mathbf{c}|\cos\theta = GMr + rc\cos\theta$$

او$c = |\mathbf{c}|$ دی. نو $r=\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h})}{\mathbf{GM}+c\cos\theta} = \frac{1}{\mathbf{GM}}\frac{\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h})}{1+e\cos\theta}$ کیږي ، په داسې حال کې چې $e=c/(GM)$ دی . دا چې

$$\mathbf{r}\cdot(\mathbf{v}\times\mathbf{h}) = (\mathbf{r}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{h} = \mathbf{h}\cdot\mathbf{h} = |\mathbf{h}|^2 = h^2$$

او $\mathrm{h} = |\mathbf{h}|$ سره دی . نو$\mathrm{r} = \frac{\frac{h^2}{(GM)}}{1+e\cos\theta} = \frac{eh^2/c}{1+e\cos\theta}$. نو که $\mathrm{d} = h^2/c$ وضع کړو مومو چې

$$\mathrm{r} = \frac{ed}{1+e\cos\theta} \quad \ldots \qquad (35)$$

معلومیږي چې (35) معادله د مخروطي مقاطعو قطبي معادله ده چې محراق یې په مبدا او عن المرکزیت یې e دی . او دا هم پوهیږو چې د سپوږمی مدار یوه تړلې منحني ده اوپورتنی معادله د مخروطي مقطع یعنې الیپس څخه عبارت دی .

په دې ځای کې دا هم زیاتوو چې په نجومي محاسبو کې دا مناسب ده چې د الیپس معادله د عن المرکزیت(c) اواعظمي محور(a) له جنسه وښودل شي. نو موږ د محراق او هادي ترمنځ فاصله(d) د a له جنسه ښیو. ددې مقصد له پاره د6فصل(10) رابطې څخه پوهیږو چې

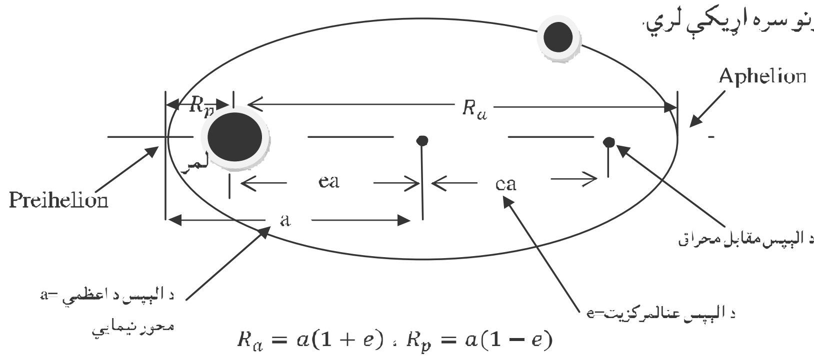
$$\mathrm{a}^2 = \frac{e^2d^2}{(1-e^2)^2}$$

$$\Rightarrow d^2 = \frac{\mathrm{a}^2(1-e^2)^2}{e^2} \Rightarrow d = \frac{\mathrm{a}(1-e^2)}{e} \Rightarrow ed = \mathrm{a}(1-e^2)$$

که د هادي معادله x=d وي نو د مخروطي مقاطعو قطبي معادله ، لاندې شکل غوره کوي:

$$\mathrm{r} = \frac{ed}{1+e\cos\theta} = \frac{\mathrm{a}(1-e^2)}{1+e\cos\theta} \quad \ldots \qquad (36)$$

دا د اليپس قطبي معادله ده چې محراق يې په مبدا کې پروت دی . دا هم زياتوو چې دسپوږمۍ ډېره نږدې فاصله د لمر څخه د نجوم په علم کې perihelion او ډېره اوږده فاصله د aphelion په نوم يادوي چې د اليپس د محراقونو سره اړيکې لري.



$R_a = a(1+e)$ ، $R_p = a(1-e)$

ش(26)

په (26) ش کې د لمر څخه د perihelion او aphelion فاصلې په ترتيب سره د perihelion او aphelion فاصلو په نوم ياديږي دا چې لمر په محراق کې دی نو د perihelion له پاره $\theta = 0$ او د aphelion له پاره $\theta = \pi$ کيږي او (36) معادله د perihelion له پاره

$$r = \frac{a(1-e)(1+e)}{1+e} = a(1-e) \quad \ldots \qquad (37)$$

او د aphelion له پاره

$$r = a(1+e) \quad \ldots . \qquad (38)$$

کيږي .

ii) د کېپلر دوهم قانون

پوهيږو چې **r**= r cos t **i**+ r sin t **j** د اليپس قطبي معادله ده او د دوهم قانون د اثبات له پاره اول دا ښيو چې :

a) $\mathbf{h}=r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{k}$ يعني $h=r^2 \cdot \frac{d\theta}{dt}$ دی .

b) که چېرې $\Lambda(t)$ هغه مساحت وي **r=r(t)** په واسطه د $[t_0, t]$ په انټروال کې وهل کيږي ، ښيو چې $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d0}{dt}$ کيږي .

ثبوت

a) ليکو چې:

$\mathbf{h}=\mathbf{r} \times \mathbf{v}=(\mathrm{r}\cos\theta\mathbf{i}+\mathrm{r}\sin\theta\mathbf{j}) \times \mathbf{v}$

$=(\mathrm{r}\cos\ \ \mathbf{i}+\mathrm{r}\sin\theta\mathbf{j}) \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}$

$=(\mathrm{r}\cos\theta\mathbf{i}+\mathrm{r}\sin\theta\mathbf{j}) \times \frac{d\mathrm{r}}{d\theta}\cdot\frac{d\theta}{dt}$

$=(\mathrm{r}\cos\theta\mathbf{i}+\mathrm{r}\sin\theta\mathbf{j}) \times \left(\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}\cdot cos\theta-\mathrm{r}\,sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}i+\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot sin\theta+\mathrm{r}\,cos\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}j$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathrm{r}\,cos\theta & \mathrm{r}\sin\theta & 0 \\ \left(\frac{d\mathrm{r}}{d\theta}\cdot cos\theta-\mathrm{r}\,sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} & \left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot sin\theta+\mathrm{r}\,cos\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt} & 0 \end{vmatrix}$$

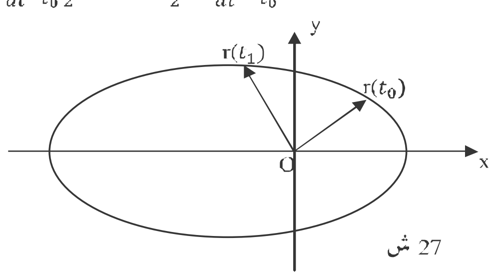
$=[(\mathrm{r}\,cos\theta\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot sin\theta+\mathrm{r}\,cos\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}-\mathrm{r}\,sin\theta\left(\frac{d\mathbf{r}}{d\theta}\cdot cos\theta-\mathrm{r}\,sin\theta\right)\cdot\frac{d\theta}{dt}]\mathbf{k}$

$=\mathrm{r}^2\frac{d\theta}{dt}(\sin^2\theta+\cos^2\theta)=\mathrm{r}^2\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{k}$

$\Rightarrow h=\mathrm{r}^2\frac{d\theta}{dt}$.

b) پوهيږو چې $A=A(t)$ هغه مساحت دی چې د $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ شعاع يې د $[t_0,t]$ په انترول کې طی کوي. او د A له پالره لرو چې $A=\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}r^2d\theta$ دی.

$$\frac{dA}{dt}=\frac{d}{dt}\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}r^2d\theta=\frac{1}{2}r^2\frac{d}{dt}\left[\int_{t_0}^{t}d\theta\right]$$



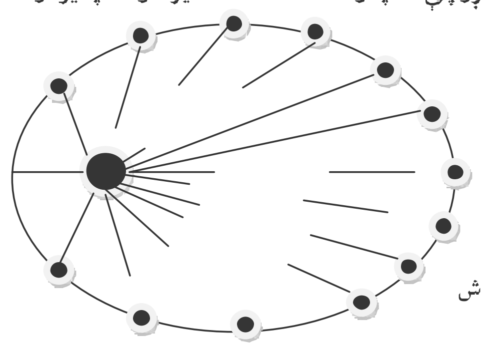
27 ش

دا چې $h=\mathrm{r}^2\frac{d\theta}{dt}$ ثابت دی، نو $\frac{dA}{dt}=\frac{1}{2}\mathrm{r}^2\frac{d\theta}{dt}=\frac{1}{2}h$ ثابت دی. يعنې د $\mathbf{r}$ په واسطه طی شوي فاصله په يو واحد د وخت کې ثابته دی، چې دا په خپله د کېپلر د دوهم قانون په ثبوت باندې دلالت کوي.

iii) د کېپلر دريم قانون

د کېپلر د دوهم قانون څخه پوهيږو چې د **r** په واسطه د مساحت تغير د وخت په يوه واحد کې ثابت دی

(28) ش



(28) ش

دا هم پوهيږو چې د الېپس مساحت د πab سره مساوي دی چې **a** او b په ترتيب سره د اوږده او لنډي قطر اوږدوالی رابنيي .نو له دې وجې څخه د ستوري(مياشتې) د وخت پريود(T)د $T=\frac{\pi ab}{\frac{1}{2}h}=\frac{2\pi ab}{h}$ څخه عبارت دی. همدارنګه د کېپلر د اول قانون د (36) رابطې څخه ليکو چې :

$$\frac{h^2}{GM}=\frac{c}{GM}\cdot\frac{h^2}{c}=e\cdot d=e\cdot\frac{a(1-e^2)}{e}=a(1-(\frac{c}{a})^2)=a\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}\right)=\frac{b^2}{a}$$

$$\Rightarrow\frac{h^2}{GM}=e\cdot d=\frac{b^2}{a}\Rightarrow b^2=\frac{h^2a}{GM}$$

$$\Rightarrow T=\frac{2\pi ab}{h}\Rightarrow T^2=\frac{4\pi^2a^2b^2}{h^2}=\frac{4\pi^2a^2\frac{h^2}{GM}a}{h^2}=\frac{4\pi^2}{GM}a^3=\frac{8\pi^2}{2GM}a^3=\frac{\pi^2}{2GM}(2a)^3$$

$$\Rightarrow T^2=\frac{\pi^2}{2GM}(2a)^3$$

اخيرنی رابطه په شکاره بيانوي چې د ستوري د پريود مربع د اوږده قطر د مکعب سره متناسب دی ،

35 مثال

که د لمر موقعيت په محراق کې ،د ځمکې د اليپتيکي مدار عن المرکزيت 0.017 او اعظمي محور اوږدوالی ولري $2.99\cdot 10^8 km$:

(a) د ځمکې د مدار له پاره قطبي معادله تخمين کړی .

(b) د ځمکې فاصله د لمر څخه پهperihelion او aphelion نقطو کې پيدا کړی .

حل

(a) د سوال څخه پوهیږو چې

$$2a=2.99\cdot 10^8 km \Rightarrow a = 1.495\cdot 10^8 \quad \wedge \quad e = 0.017$$

نو د (36) معادلې څخه لرو چې

$$r=\frac{ed}{1+e\cos\theta}=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}=\frac{(1.495\cdot 10^8)[1-(0.017)^2]}{1+0.017\cos\theta}\approx\frac{1.49\cdot 10^8}{1+0.017\cos\theta}$$

(b) د (37) او (38) معادلو څخه د perihelion او aphelion فاصلو له پاره په ترتیب سره لروچې:

$$r=a(1+e)=(1.495\cdot 10^8)(1+0.017)\approx 1.52\cdot 10^8 km \quad : \text{prihelion} \quad (i$$

$$r=a(1+a)=(1.495\cdot 10^8)(1+0.017)\approx 1.52\cdot 10^8 km \quad : (aphelion) \quad (ii$$

7. تمرین

1. معلوم کړئ چې کوم یو بیان سم او کوم یو نا سم دی .

a) د یو خط سره دوه موازي خطونه، سره موازي دي.

b) په یو خط باندې دوه عمود خطونه، سره موازي دي .

c) دوې مستوی چې د دریمې مستوي سره موازي وي ،سره موازي دي .

d) دوې مستوی چې په دریمه مستوي عمود وي ،سره موازي دي .

e) د مستوی سره دوه موازي خطونه ،سره موازي دي .

f) په مستوي باندې دوه عمود خطونه ،سره موازي دي .

g) د یوه خط سره دوې موازي مستوی، سره موازي دي .

h) په یوه خط باندې دوې عمود مستوی ،سره موازي دي .

i) دوې مستوی تل سره متقاطع او یا سره موازي وي .

j) دوه خطونه سره متقاطع یا سره موازي وي .

k) یوه مستوي او یو خط سره متقاطع او یا سره موازي وي .

د لاندینیو خطونو له پاره وکتوري او پارامتریکې معادلې پیدا کړئ.

2) یو خط)د (1,0,-3) نقطې څخه تېرېږي او د **2i-4j+5k** وکتور سره موازي دي .

3) یو خط د (-2,4,10) نقطې څخه تېرېږي او د $\langle 3,1,-8\rangle$ وکتور سره موازي دی .

4) یو خط د (0,14,-10) نقطې څخه تېرېږي او د $x=-1+2t\ ;\ y=6-3t\ ;\ z=3+9t$ خط سره موازي دی .

5) یو خط د (1, 0,6) نقطې څخه تېرېږي او د $x+3y+z=5$ مستوي باندې عمود دی .

د لاندینیو خطونو له پاره پارامتریکې او متناظرې معادلې پیدا کړی

6) یو خط د مبدا او (1,2,3) نقطې څخه تېرېږي .

7) یو خط د (1,3,2) او (-4,3,0) دوو نقطو څخه تېرېږي .

8) یو خط د (2,4,5) او (6,1,-3) دوو نقطو څخه تېرېږي .

9) یو خط د (2,1,-3) او $(0,\frac{1}{2},1)$ دوو نقطو څخه تېرېږي .

د لاندینیو مستویو معادلې پیدا کړی .

10) یوه مستوي چې د (6,3,2) نقطې څخه تېرېږي او د $\langle -2,1,5\rangle$ وکتور باندې عمود وي .

11) یوه مستوي د (4,0,-3) نقطې څخه تېرېږي او د **j**+2**k** وکتور یې نورمال وکتور دی .

د لاندینیو وکتوري توابعو سرعت ، تعجیل او تېزي پیدا کړی .

(12 $\mathbf{r}(t)=\langle t, t^2, t^3\rangle$

(13 $\mathbf{r}(t)=t^2\mathbf{i}+ lnt\,\mathbf{j}+t\,\mathrm{k}$

(14 $\mathbf{r}(t)=e^t(\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k})$

15) د $x=\sin 2t\ ,\ y=t\ ,z=\cos 2t$ منحني له پاره په $(0,\pi,1)$ نقطه کې د تماسي مستوي معادله پیدا کړی .

د لاندې و کتیوري معادلو څخه د تعجیلي وکتور، مماسي او نورمال مرکبې په لاس راوړی .

(16 $\mathbf{r}(t)=(3t-t^3)\mathbf{i}+3t^2\,\mathrm{j}$

(17 $\mathbf{r}(t)=\cos t\,\mathbf{i}+\sin t\,\mathbf{j}+t\,\mathbf{k}$

(18 $\mathbf{r}(t)=t\,\mathbf{i}+t^2\,\mathbf{j}+3t\,\mathbf{k}$

19) د $y = x^4$ منحني کوږوالی په (1,1) نقطه کې پیدا کړی .

20) د $r(t)=\langle \frac{1}{3}t^3, \frac{1}{2}t^2, t\rangle$ له پاره د واحد مماسي وکتور ،واحد نورمال وکتور او د کوږوالي معادلې پیدا کړی .

21) د مشتري(Jupiter) د مدار عن المرکزیت 0.048 او د اعظمي محور اوږدوالی یې 10^9 km $1.56\cdot 10^9$ دی، د هغې د مدار له پاره قطبي معادله پیدا کړی .

22) د پلوتو(Pluto) فاصله په perihelion کې د لمر څخه $4.43\cdot 10^9$ km او په aphelion کې $7.37\cdot 10^9$ km دی. د پلوتو د مدار عن المرکزیت(e) پیدا کړی .

د مفهومونو فهرست	صفحه

د سمبولونو په څېر یوناني الفباتوري:

حروف		نوم	حروف		نوم	حروف		نوم
A	**α**	الفا	Ι	ι	یوتا	Ρ	ρ	رو
B	**β**	بیتا	K	κ	کپا	Σ	σ	سیگما
Γ	**γ**	گاما	Λ	λ	لمبدا	T	τ	تَو
Δ	**δ**	دلتا	M	μ	میو	Υ	υ	ییپسلون
E	**ε**	اپسلون	N	ν	نیو	Φ	φ	في
Z	**ζ**	زیتا	Ξ	ξ	اکسي	X	χ	شي
H	**η**	ایتا	O	ο	اومیکرون	Ψ	ψ	پسي
Θ	**ϑ**	تیتا	Π	π	پای	Ω	ω	اومیگا

References:

1. Apostol,T.M. (1975). *Mathematiccal Analysis*. Massachsetts USA: Wesley Publishing Company. p. 350-360.

2. Ann,X.G andHoward,B. (1993). *Foundation for Advanced Mathematics*. New York: Publication, INC. p.24,335,593-629.

3.Arnett,R.A. Ziegler and M.R.Byleen,K.E. (1999). *Calculus*. New Jersy: Prentice- Hall. P.416-420.

4. Barzynski,D and Sanders,G.D. (1995). *Applied Calculus*.Boston USA : PWS Publishing Company. p.450-500.

5. Bermant,A.I. and Aramana, Vich I.G. (1995). *Mathematical Analysis*. Moscow: Mir Publishing. P. 258-343,365-568 .

6. Demidevich,B. (1981). *Problems Mathematical Analysis*. Moscow : Mir Pub. P. 60-95 .

7. DAVID,NELSON. (1998). Dictionary ofMathematics Second , Edition. England: Peguim Books Co., p.1-454.

8. Frank, Ayres Jr. Elliott Mendelson. (1964). Defferential and Integral Calculus 3/ed. Singapre: Metric Editions Schaum's Outline Series. p.58-68,206-251 .

9. Gerald,L.B. and Karl J. (1999). *Single Variable Calculus Second Edition*. New Jersy: Prentice-Hall. P. 37-100 .

10. George.B. Thomas,Jr.(1999). *Calculus* 6^{th}*Edition*. United States of America: Wely Publishing Company. P. 159-181,787-870 .

11. George.B. Thomas,Jr. (2003). *Thomas,Calculus* 10^{th}*Edition*. United-States of America: Wesly Publishing Company. p.717-784 .

12. JAMES,STEWART. (2008).*CALCULUS*. Canada: Brook/Cool International Cengage Com. p.620-662,817-838 .

13. Kenneth, H.Rosen. (2009). *Discrete Mathematics and its Application*. New Delhi: McGra-Hill Co., p. 121,126 .

14. Lee,E.y., Valarie, A.E and Glen,D.V. (1986). *Advanced Mathematical Concepts*. Londen: Sedney,C.E.M Publishing Co., p.84-100 .

15.Talpure,M.N.M. (1982). *Calculus and Analytic Geometry*.Lahore: Feroz Sons,(PVT) LTD.,p. 42-46,400 .

16.Murry,R.Spiegel. (2004). *Vector Analysis*. Lahore: Jahangir Printers, p. 1-56 .

17. Murry,R.Spiegle. (1998).Advanced Mathematics for Engineers and Schentists. Singapore: Kin Keong Printing Co.,p.1-38.

18. Nikolsky,S.M.(1987). A Course of Mathematical Analysis,2 volves. Moscow: Mir Pub. P. 93-112 .

19.Natham,O.Niles and George E.Haborak.(1971). *Calculus with Analytic* Geometry. New Jersy: Printice Hall,INC., p.57-70,310-345 .

20. N.Piskunov. (1974). *Differential and Integral Calculus*.Moscow: Mir Publishers. P.20,65-111 .

21.Piskunov. (1981). *Differential and Integral Calculus 1 volves*.Moscow: Mir Pub. P. 29-42 .

22.Peter, K. (1988). *Technical Calculus with Analytic Geometry Secon*d *Edition*. Canada: Brook-Cool Publishing Company,p.105-311 .

23.R.Johnson, Baugh. (2005). *Discrete Mathematics six Edition*. Lahore: Feroz Sons (PVT) LTD., p.1-150 .

24.Ramond,A.Barnett. (1987). College Algebra. New Delhi: McGraw-Hill International Edition. P. 30-104 .

25. SALAS and HILLE's. (1996). *Calculus One Variable seventh Edition.* New york:John Wesly and Sons INC., p. 7-20,211-252,549-582 .

26.Susana, S.E. (1995). *Discrete Mathematics with Application.Canada:* Brook/ Cool Publication Company, p.345,534-450.

27.Umarzai (2009). *Calculus and Analytic Geometry.*Peshawar: Khyber Bazaar,p.1-259 .

28. ایمل ، عبدالحق او نورزاد ، گل محمد . (۱۳۶۸) .انالیز I. کابل :د کابل پوهنتون خپروني. صفحه ۲۱، ۲۹ -۹۳.

29. ایمل ، عبدالحق او نورزاد ، گل محمد .(۱۳۷۰) .انالیزII .کابل :د کابل پوهنتون خپروني. صفحه ۴۲- ۷۷

30. باور سیدقیوم شاه . (۱۳۸۵)د ریاضي اساسات . کابل: د نعماني نشراتي موسسه صفحه ۱-۲۰

31. دوندوچینکه و سادات ،عزیزاله . (۱۳۶۰). ریاضیات عالي. کابل: نشرت انستتیوت پولي تخنیک کابل صفحه۱-۴۰.

32. کاکړ،عبدالغفار و جنت زی ، گل محمد . (۱۳۶۲). ریاضیات عمومي. کابل: انتشارات پوهنتون کابل.صفحه۳۸- ۱۳۰.

33. مهرا . موهن لعل و جنت زی. گل محمد . (۱۳۶۱) انالیزI. کابل :نشرات پوهنتون کابل،صفحي ۲۵- ۱۲۸، ۵۳، ۲۹-۲۰۵

34. مهرا ، موهن لعل و جنت زی، گل محمد . (۱۳۶۳). انالیزII . کابل : نشرات پوهنتون کابل،صفحه ۱۰- ۲۰۷.

35. غوري انور. (۱۳۸۵) . رياضيات عمومي لکچر نوټ . کابل :ناشر همیارانصفحه ۳۰-۳۳

36. غوري انور .(۱۳۸۳). رياضيات عالي تکچر نوټ. کابل: صحافي انتشارات نعماني بره کي شهرارا ، مارکيټ گلزادصفحه ۱۷۲-۲۰۸.

Message from the Ministry of Higher Education

In the history, book has played a very important role in gaining knowledge and science and it is the fundamental unit of educational curriculum which can also play an effective role in improving the quality of Higher Education. Therefore, keeping in mind the needs of the society and based on educational standards, new learning materials and textbooks should be published for the students.

I appreciate the efforts of the lecturers of Higher Education Institutions and I am very thankful to them who have worked for many years and have written or translated textbooks.

I also warmly welcome more lecturers to prepare textbooks in their respective fields. So, that they should be published and distributed among the students to take full advantage of them.

The Ministry of Higher Education has the responsibility to make available new and updated learning materials in order to better educate our students.

At the end, I am very grateful to German-Afghan University Society (DAUG) and all those institutions and people who have provided opportunities for publishing medical textbooks.

I am hopeful that this project should be continued and publish textbooks in other subjects too.

Sincerely,
Prof. Dr. Obaidullah Obaid
Minister of Higher Education
Kabul, 2013

Publishing Medical Textbooks

Honorable lecturers and dear students,

The lack of quality textbooks in the universities of Afghanistan is a serious issue, which is repeatedly challenging the students and teachers alike. To tackle this issue we have initiated the process of providing textbooks to the students of medicine. In the past two years we have successfully published and delivered copies of 116 different books to the medical colleges across the country.

The Afghan National Higher Education Strategy (2010-1014) states:

"Funds will be made ensured to encourage the writing and publication of text books in Dari and Pashto, especially in priority areas, to improve the quality of teaching and learning and give students access to state-of- the-art information. In the meantime, translation of English language textbooks and journals into Dari and Pashto is a major challenge for curriculum reform. Without this, it would not be possible for university students and faculty to acquire updated and accurate knowledge"

The medical colleges' students and lecturers in Afghanistan are facing multiple challenges. The out-dated method of lecture and no accessibility to update and new teaching materials are main problems. The students use low quality and cheap study materials (copied notes & papers), hence the Afghan students are deprived of modern knowledge and developments in their respective subjects. It is vital to compose and print the books that have been written by lecturers. Taking the situation of the country into consideration, we need desperately capable and professional medical experts. Those, who can contribute in improving standard of medical education and Public Health throughout Afghanistan, thus enough attention, should be given to the medical colleges.

For this reason, we have published 116 different medical textbooks from Nangarhar, Khost, Kandahar, Herat, Balkh and Kapisa medical colleges and Kabul Medical University. Currently we are working to publish 20 more medical textbooks for Nangarhar Medical Faculty. It is to be mentioned that all these books have been distributed among the medical colleges of the country free of cost.

All published medical textbooks can be downloadable from www.ecampus-afghanistan.org

The book in your hand is a sample of printed textbook. We would like to continue this project and to end the method of manual notes and papers. Based on the request of Higher Education Institutions, there is need to publish about 100 different textbooks each year.

As requested by the Ministry of Higher Education, the Afghan universities, lecturers & students they want to extend this project to the non-medical subjects e.g. Science, Engineering, Agriculture, Economics, Literature and Social Science. It is reminded that we publish textbooks for different colleges of the country who are in need.

I would like to ask all the lecturers to write new textbooks, translate or revise their lecture notes or written books and share them with us to be published. We assure them quality composition, printing and free of cost distribution to the medical colleges.

I would like the students to encourage and assist their lecturers in this regard. We welcome any recommendations and suggestions for improvement.

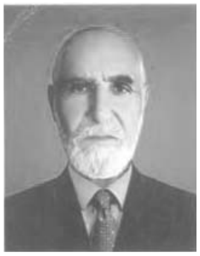
It is mentionable that the authors and publishers tried to prepare the books according to the international standards but if there is any problem in the book, we kindly request the readers to send their comments to us or authors to in order to be corrected in the future.

We are very thankful to German-Afghan University Society (DAUG), who provided fund for this book.

I am especially grateful to GIZ (German Society for International Cooperation) and CIM (Centre for International Migration & Development) for providing working opportunities for me during the past three years in Afghanistan.

In Afghanistan, I would like cordially to thank His Excellency the Minister of Higher Education, Prof. Dr. Obaidullah Obaid, Academic Deputy Minister Prof. Mohammad Osman Babury and Deputy Minister for Administrative & Financial Affairs Prof. Dr. Gul Hassan Walizai for their cooperation and support for this project. I am also thankful to all those lecturers that encouraged us and gave all these books to be published. At the end I appreciate the efforts of my colleagues in the office for publishing books.

Dr Yahya Wardak
CIM-Expert at the Ministry of Higher Education, March, 2013
Karte 4, Kabul, Afghanistan
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org
wardak@afghanic.org



د ليکوال لنډه پېژندنه

ګل محمد جنت زی د میرجنت ګل زوی د خوست ولايت د کوټي کلي اوسيدونکی په ۱۳۲۷ کال کې زېږيدلی دی . نوموړی په ۱۳۳۳کال کې د خوست د غرغښت په ابتدايه ښوونځی کې شامل او په۱۳۴۵ کال کې د خوست د غرغښت ليسې د دوولسم ټولګي څخه فارغ شويدی .د ۱۳۴۵ کال څخه تر ۱۳۴۸ کال پورې په خپله د غرغښت په ليسه کې د ښوونکي په صفت مقرر شو او د ۱۳۴۸ کال د کانکور ازموينې د ورکولو وروسته د علومو پوهنځی ته ورشامل شو، چې په نتيجه کې يې د ۱۳۵۲ کال په پای کې د ليسانس ديپلوم تر لاسه کړ او بېرته د ۱۳۵۲څخه تر ۱۳۵۴ پورې د غرغښت په ليسه کې ښوونکی مقرر شو.

نوموړی د ۱۳۵۴ کال په پای کې د کابل پوهنتون د ساينس پوهنځی د رياضي په ديپارتمنت کې په علمي کادر کې د نامزد پوهيالي په حيث مقرر شو . ماستري ديپلوم يې د رياضياتو ديپارتمنت څخه د داخل خدمت په شکل د ساينس په پوهنځی کې تر لاسه کړ .، چې د ۱۳۷۵ کال پورې د ساينس په پوهنځی کې تر پوهنوالی علمي رتبې پورې ورسيد او تر هغې وروسته د داخلي جنګونو له امله تېښتې ته مجبور شو چې په نتيجه کې د استادی دندې څخه وايستل شو.

پوهنوال ګل محمد جنت زي په ۱۳۸۰ کال کې بېرته د لوړو زده کړو وزارت ته مراجعه وکړه او بېر ته دساسنس په پوهنځی کې د استاد په صفت و ګمارل شواوپه ۱۳۸۱ کال کې يې افغان پوهنتون ته چې اوس يې نوم د شېخ زايد پوهنتون دی خپل ځان را تبديل کړ .نوموړی برسېره پر استادی د شېخ زايد په پوهنتون کې د محصلانو د چارو د مرستيال په توګه دنده اجرا کوله او د رياضي فزيک ديپارتمنت آمر هم وو، ترهغې وروسته د ښوونې او روزنې پوهنځی د ريس په توګه مقرر شو او د درو کالونو وروسته د خپلې ليکلي استعفا ورکولو له امله د پوهنځی رياست پرېښود او يوازې د ديپارتنت د آمر په صفت پاته شو .نوموړي استاد جرمني، چين او ويتنام هېوادونو ته د ا دارې او منجمنت ، IT او د ښوونې روزنې په برخه کې د لنډې مودې فيلوشيفونه اخيستې دي او د انګليسي په ژبه باندې ښه تسلط لري .

Book Name	General Mathematics
Author	Prof. Gul M. Jannat Zai
Publisher	Shaikh Zayed University, Khost
Website	www.szu.edu.af
Number	1000
Published	2013
Download	www.ecampus-afghanistan.org

This Publication was financed by the **German-Afghan University Society (DAUG)**
Administrative and Technical support by **Afghanic** organization.
The contents and textual structure of this book have been developed by concerning author and relevant faculty and being responsible for it.
Funding and supporting agencies are not holding any responsibilities.

If you want to publish your textbooks please contact us:
Dr. Yahya Wardak, Ministry of Higher Education, Kabul
Office: 0756014640
Email: textbooks@afghanic.org

ISBN: 978 993 6200 159